

# Experimentelle Untersuchungen zur rauschfreien stochastischen Resonanz am Beispiel einer Attraktor–Verschmelzkrise



Vom Fachbereich Physik  
der Technischen Universität Darmstadt  
zur Erlangung des Grades  
eines Doktors der Naturwissenschaften  
(Dr. rer. nat.)  
genehmigte Dissertation

von  
**Dipl.-Phys. Thomas Claudio Stemler**  
aus Löffingen/Schwarzwald

Darmstadt August 2006  
D17

Referent:	Prof. Dr. H. Benner
Korreferentin:	Prof. Dr. B. Drossel
Tag der Einreichung:	19. April 2006
Tag der Prüfung:	26. Juni 2006

# Abstract

Stochastic resonance, introduced two decades ago as a model for geophysical dynamics, has recently found its way into such diverse fields as physics, meteorology, chemistry, and biology. The rising interest in this field stems from the counterintuitive effect that a periodic signal component can be amplified by a stochastic force. Noise-free stochastic resonance is frequently observed in systems showing intermittency. The fast degrees of freedom act on the slow intermittency time scale, like noise does in conventional stochastic systems. On variation of a control parameter the jump rate between the intermittent states can be changed. In this sense changes of the control parameter are equivalent to changes of the noise strength  $D$  in stochastic systems. Like in conventional stochastic resonance, the intermittent jumps of the dynamical system can be synchronised by a weak periodic modulation, so that maximum signal amplification is obtained by choosing the proper control parameter.

Here the phenomenon of noise-free stochastic resonance is investigated in an autonomous electronic circuit, showing crisis induced intermittency. Intermittency results from the merging of two symmetric mono-scroll attractors. Above a critical control parameter value the dynamics is governed by fast oscillations on the sub-attractors and a slow jumping dynamics between them. It is shown that close to such a crisis small periodic and aperiodic signals can be enhanced by synchronising the mean intermittent jump rate with the modulation frequency, which could be achieved through variation of the control parameter. In the particular system several maxima of enhancement can be found, which means the occurrence of stochastic multi-resonance.

The experimental data is used to analyse the equivalence and cooperation of stochastic and deterministic chaotic dynamics in stochastic resonance related phenomena. A general mechanism leading to stochastic multi-resonance is explored. The main results can be summarised as follows:

- (i) The effect of stochastic and chaotic dynamics are largely equivalent provided that the characteristic time scales of input signal and chaotic forcing are well separated. In particular, close to the crisis noise-induced and noise-free jump rates show exactly the same scaling properties.
- (ii) The theoretical concept of conventional stochastic resonance developed by McNamara and Wiesenfeld (1991) was successfully extended to model such modifications as noise-free, aperiodic and multi-resonance.

(iii) Stochastic multi-resonance was observed at various experimental conditions, i.e. for periodic as well as aperiodic signals at a merging crisis, but also for spatio-temporal stochastic resonance in an array of Schmitt triggers. The mechanism of multi-resonance can be directly related to the non-monotonous dependence of the jump rate on the control parameter, which does not occur for the noise-induced Kramers rate. In the case of the merging crisis the non-monotonous low-amplitude structures observed were interpreted to reflect the fractal structure of the merging attractors and the corresponding basins of attraction.

(iv) Following the spirit of a Kramers-Moyal expansion the complex deterministic-chaotic system investigated could be successfully mapped to a simple one-dimensional stochastic model, which could almost quantitatively explain the experimental data.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Dynamisches Verhalten des Shinriki-Schwingkreises</b>	<b>5</b>
2.1	Experimentelles System und Flussgleichung . . . . .	5
2.2	Dynamisches Verhalten . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Statistische Eigenschaften der Verschmelzkrise</b>	<b>15</b>
3.1	Allgemeine statistische Eigenschaften chaotischer Systeme . . . . .	15
3.2	Kriseninduzierte Intermittenz . . . . .	31
3.3	Intermittenz am Shinriki-Oszillator . . . . .	41
3.4	Zusammenfassung . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Stochastische Resonanz</b>	<b>51</b>
4.1	Stochastische Resonanz am Schmitt-Trigger . . . . .	51
4.2	Theoretische Beschreibung der stochastischen Resonanz . . . . .	57
4.3	Stochastische Resonanz im Doppelmuldenpotential . . . . .	60
4.4	Aperiodische stochastische Resonanz . . . . .	63
4.5	Rauschfreie stochastische Resonanz und Multiresonanz . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Stochastische Resonanz am Shinriki-Oszillator</b>	<b>69</b>
5.1	Stochastische Resonanz an der rauschinduzierten Krise . . . . .	69
5.2	Stochastische Resonanz an der Verschmelzkrise . . . . .	70
5.3	Vergleich mit linearer Antworttheorie . . . . .	76
<b>6</b>	<b>Stochastisches Modell</b>	<b>81</b>
6.1	Kramers-Moyal Entwicklung . . . . .	81
6.2	Abbildung auf ein stochastisches Modell . . . . .	84
6.3	Zeitreihenanalyse mit stochastischem Signal . . . . .	85
6.4	Zeitreihenanalyse der chaotischen Zeitreihen . . . . .	87
6.5	Diskussion der Ergebnisse . . . . .	90
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>95</b>
<b>A</b>	<b>Aus- und Einkopplungsschaltungen des Shinriki-Oszillators</b>	<b>97</b>

<b>B</b>	<b>Schmitt-Trigger</b>	<b>101</b>
B.1	Aufbau und Messungen . . . . .	101
B.2	Raumzeitliche stochastische Resonanz . . . . .	102

# Kapitel 1

## Einleitung

Das Auftreten von Rauschen wird im Alltag häufig als störend empfunden. Der Einfluss des Rauschens behindert die Signalübertragung und führt im schlimmsten Fall zum kompletten Informationsverlust. Deshalb wurden in den vergangenen Jahren immer mehr technische Lösungen entwickelt, die eine rauschfreie Signalübertragung ermöglichen. Üblicherweise versucht man bei diesen Lösungen, sowohl auf der Seite des Senders als auch des Empfängers, das Rauschen zu minimieren. Ein möglicher Weg hierbei ist es, die Systeme mit Bauteilen hoher Qualität zu bestücken und mit erheblichen Aufwand eine Entkopplung der Systeme von störenden Umgebungseinflüssen zu erreichen. Betrachtet man als Beispiel die Signalübertragung von einem Rundfunk-Sender zu einem Radioempfänger, so wird schnell klar, wie aufwendig und teuer die Rauschminimierung ist: Selbst bei der Auswahl der optimalen Empfangsfrequenz, die heutzutage häufig durch ein automatisches RDS-System geschieht, gilt es, Störeinflüsse durch thermisches Rauschen im elektronischen System, Netzschwankungen und Beeinträchtigungen durch andere eingeschaltete, elektronische Geräte zu minimieren.

Andererseits zeigen eine Vielzahl von nichtlinearen Systemen, dass Rauschen nicht immer störend wirkt, sondern die Übertragung schwächster Signale mitunter erst ab einer gewissen Rauschintensität möglich ist. Dieses Phänomen, das unseren Alltagserfahrungen gänzlich widerspricht, ist die *stochastische Resonanz* [1]. Üblicherweise spricht man von Resonanz, wenn ein dynamisches System bei einer bestimmten Anregungsfrequenz, die in der Nähe der Systemeigenfrequenz liegt, mit einer verstärkten Amplitude antwortet. Beim Hertz'schen Dipol [2] kann eine resonante Signalübertragung erreicht werden, indem man bei fester Sendefrequenz die Form und damit die Eigenfrequenz der Empfangsantenne verändert. Bei der stochastischen Resonanz findet man eine ähnliche Verstärkung des schwachen Signals bei einer optimalen Rauschintensität, die sich durch eine hohe Korrelation zwischen Signal und Systemdynamik auszeichnet. Ober- und unterhalb der optimalen Rauschintensität geht die Korrelation verloren. Das Zustandekommen der Verstärkung durch das Zusammenspiel von Rauschen und Signal im System kann in Analogie zum Hertz'schen Dipol verstanden werden: Wesentlich für die

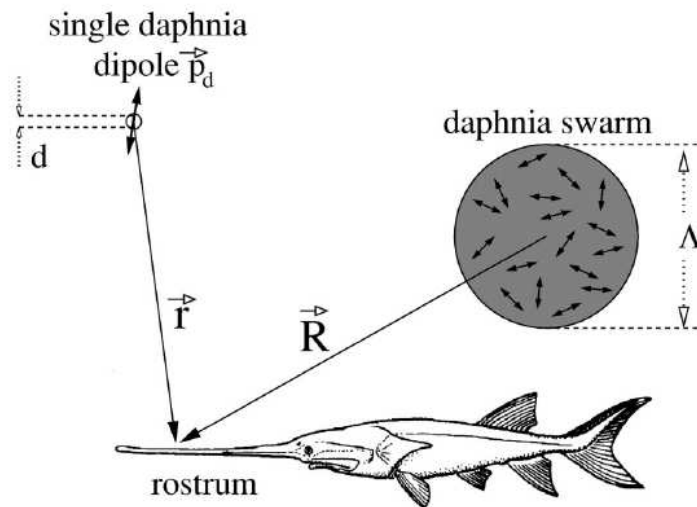


Abbildung 1.1: Das natürliche Jäger-Beute-System des Löffelstör: Indem der Löffelstör einen gewissen Abstand zum Daphnien-Schwarm einhält, optimiert er seine lokale Rauschstärke und kann so das schwache Dipolsignal eines Wasserflohs außerhalb des Schwarms besser detektieren. Darstellung entnommen aus [3].

Resonanz ist die mittlere rauschinduzierte Sprungfrequenz des nichtlinearen Systems. Stimmt diese induzierte “Eigenfrequenz” mit der Frequenz des angelegten schwachen Signals überein, kommt es zu der für stochastische Resonanz charakteristischen Verstärkung. Eine Variation der angelegten Rauschintensität führt zu einer Veränderung der rauschinduzierten Systemfrequenz. Hierdurch kann das nichtlineare System – ähnlich wie der Hertz’sche Dipol – auf die angelegte Signalfrequenz abgestimmt werden, um eine resonante Übertragung zu erreichen.

Gerade in biologischen Systemen ist das Phänomen der stochastischen Resonanz erfolgreich adaptiert worden. So zeigen Studien des Fressverhaltens vom Löffelstör (engl.: *paddlefish*), der in den trüben Gewässern des Mississippi und des Yangtse beheimatet ist und seine Beute nicht visuell aufspüren kann, dass die zahlreichen Elektrozeporen am Stirnfortsatz (*Rostrum*) dieses Fisches die elektromagnetischen Signale der bevorzugten Beute besser detektieren können, wenn ein zusätzliches Rauschen vorhanden ist [3, 4, 5]. Durch stochastische Resonanz kann die schwache Dipolstrahlung, die von den einzelnen Beutetieren – Wasserflöhe der Spezies *Daphnia* – ausgeht, verstärkt und erkannt werden. Dies zeigen Laborexperimente mit Jungtieren, die sich im Gegensatz zu älteren Löffelstören von einzelnen Wasserflöhen ernähren. In diesen Experimenten wurde nachgewiesen, dass die Wasserflöhe bei einem gewissen Hintergrundrauschen von den Löffelstören in einem maximalen Radius erkannt und gefressen werden. Aus biologischen Feldstudien weiss man, dass die jungen Löffelstöre einzelne Wasserflöhe in der Nähe von Daphnien-Schwärmen jagen. Von diesen Schwärmen geht ein elektromagneti-



sches Rauschen aus, welches durch die Überlagerung der unkorrelierten Dipolstrahlung der Schwarmindividuen entsteht. Dies legt die Vermutung nahe, dass junge Löffelstöre die Rauschintensität an ihrem Rostrum optimieren, indem sie bei ihrer Jagd einen gewissen Abstand zum Schwarm halten ( vgl. Abb. 1.1).

Seit Benzi et al. vor über 20 Jahren den Mechanismus der stochastischen Resonanz beim Versuch, den periodischen Wechsel zwischen Warm- und Kaltzeiten im Erdklima zu erklären, gefunden hatten [6, 7], wurden viele Forscher dazu stimuliert, in ihren wissenschaftlichen Disziplinen nach dem Phänomen der rauschinduzierten Verstärkung zu suchen. Die Gründe für dieses fachübergreifende Interesse liegen in der Allgegenwärtigkeit von Rauschen bei der Behandlung realer Systeme und in den geringen Anforderungen, die zur stochastischen Resonanz führen. Diese Anforderungen sind: (a) Multistabilität des Systems mit einer Potentialbarriere zwischen den Zuständen und (b) eine rauschinduzierte Sprungdynamik zwischen den Zuständen. Führt die Modulation durch das schwache Signal zur periodischen Bevorzugung einer Sprungrichtung, so zeigt das System in der Regel stochastische Resonanz.

Bereits 1990 haben Anishchenko et al. [8] gezeigt, dass die zufällige Sprungdynamik zwischen den Zuständen nicht unbedingt rauschinduziert sein muss. Sie untersuchten ein chaotisches bistabiles System, das aufgrund einer schnellen chaotischen Dynamik in den Zuständen auf einer langsameren Zeitskala scheinbar zufällig zwischen den dynamischen Zuständen wechselt. Diese Sprungfrequenz kann durch die Veränderung eines Systemparameters ebenso variiert werden, wie dies in stochastischen Systemen bei Veränderung der Rauschintensität geschieht. Am chaotischen System konnte die für stochastische Resonanz charakteristische Verstärkung eines zusätzlich eingekoppelten schwachen Signals nachgewiesen werden, allerdings zeigten sich mehrere optimale Systemparameterwerte, an denen eine hohe Korrelation zwischen dem Signal und der Sprungdynamik vorlag. Dieses Phänomen der *stochastischen Multiresonanz* wurde fast zehn Jahre später als ein neuer Effekt in rauschgetriebenen Systemen gefeiert [9], bei chaotischen System ist er jedoch nicht aussergewöhnlich [10, 11].

Gegenstand dieser Arbeit ist eine quantitative Untersuchung der stochastischen Resonanz an einem experimentellen chaotischen System, das stochastischen Multiresonanz zeigt. Im folgenden Kapitel wird zunächst der untersuchte elektronische Schwingkreis und seine Dynamik bei unterschiedlichen Systemparameterwerten vorgestellt. Für die Erklärung der gemessenen charakteristischen Verstärkung durch stochastische Resonanz im chaotischen System sind die statistischen Eigenschaften der Dynamik im Bistabilitätsbereich des Schwingkreises wesentlich, auf die ich in Kapitel 3 eingehen werde. Der Fokus dieses Kapitels liegt bei der Präsentation von Ergebnissen, die deutlich machen, dass die für stochastische Resonanz in rauschgetriebenen Systemen entwickelten theoretischen Konzepte aus Kapitel 4 auch zur Erklärung der stochastischen Resonanz im chaotischen Schwingkreis anwendbar sind. In diesen Themenbereich gehört neben Untersuchungen zur Stabilität des chaotischen bistabilen Attraktors vor allem eine genaue Analyse der Sprungdy-

namik. Diese Analyse zeigt deutlich die statistische Unabhängigkeit der Verweilzeiten in den Zuständen auf und liefert die genaue Abhängigkeit zwischen der mittleren Sprungfrequenz und dem variierten Systemparameter. Mit diesen Ergebnissen kann die gemessene stochastische Resonanz im Schwingkreis tatsächlich sehr gut durch die in stochastischen Systemen gewonnen theoretischen Methoden erklärt werden. Dieser Kernpunkt meiner Arbeit findet sich in Kapitel 5.

Zahlreiche Diskussionen mit Kollegen, die seit Jahren stochastische Resonanz in ausschließlich rauschgetriebenen Systemen erforschen und deshalb zurecht ein gewisses Verständnisproblem mit einem stochastischen Resonanz-Effekt in chaotischen Systemen haben, führten zu Kapitel 6. Anhand von langen Zeitreihen des chaotischen Systems kann die deterministisch verursachte Sprungdynamik auf die stochastische Sprungdynamik eines Teilchens in einem Doppelmuldenpotential abgebildet werden. Die Entwicklung eines stochastischen Modells ist bereits aus dem Blickwinkel der Zeitreihenanalyse interessant und folgt den Kerngedanken der bekannten Kramers-Moyal-Entwicklung [12, 13]. Sie ermöglicht für stochastische Zeitreihen eine Bestimmung von Drift und Diffusion. Im Zusammenhang mit der stochastischen Resonanz erweist sich die Abbildung der chaotischen Dynamik auf dieses spezielle stochastische Modell als äußerst wertvoll. Die stochastische Sprungdynamik in einem Doppelmuldenpotential ist das Standardsystem, an dem viele Eigenschaften der stochastischen Resonanz genaustens untersucht wurden. Deshalb kann durch mein stochastisches Modell nicht nur ein Missverständnis zwischen Kollegen unterschiedlicher wissenschaftlicher Herkunft hoffentlich aufgeklärt werden, sondern es ermöglicht eine neue Sichtweise auf die Ursachen, die in chaotischen Systemen zu stochastischer Multiresonanz führen.

# Kapitel 2

## Dynamisches Verhalten des Shinriki-Schwingkreises

Der untersuchte autonome Schwingkreis ist ein Shinriki-Oszillator. Dieser Schwingkreis zeigt die typische Periodenverdopplungskaskaden-Route ins Chaos und – wie alle Schwingkreise der Chua-Familie – oberhalb eines kritischen Kontrollparameters kriseninduzierte Intermittenz. Im ersten Teil dieses Kapitels werde ich den Schwingkreis vorstellen, um im Folgenden anhand von Beispielmessungen die Vielfalt dynamischer Verhaltensweisen aufzuzeigen, die diesen Schwingkreis auszeichnen.

### 2.1 Experimentelles System und Flussgleichung

Der untersuchte autonome Schwingkreis wurde 1981 von Shinriki et al. vorgeschlagen [14]. In Abb. 2.1(a) ist der Aufbau schematisch dargestellt. Die einzige Nichtlinearität des Systems besteht aus zwei gegeneinander geschaltete Zenerdioden parallel zum Widerstand  $R_2$ . Die Strom-Spannungscharakteristik der Dioden ist in Teil (b) der Abbildung dargestellt. Über diese Nichtlinearität wird ein gewöhnlicher Schwingkreis ( $C_2LR_3$ ) mit einer weiteren Kapazität  $C_1$  gekoppelt. Zu diesem schwingfähigen Teil des Systems ist ein variabler Widerstand  $R$  und ein Operationsverstärker (Op-Verstärker) mit drei weiteren Widerständen geschaltet. Diese Op-Verstärker-Schaltung – ein so genanntes NIC-Element (NIC von *negative impedance converter*) – wirkt im Frequenzbereich der Messungen wie ein negativer Widerstand  $-R_N$ .

Die Spannungen  $V_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  in der Abbildung sind die Messgrößen, die zur Charakterisierung des dynamischen Verhaltens gemessen wurden. Über den parallel geschalteten Widerstand  $R$  zwischen dem negativen Widerstand und dem schwingfähigen Teil des Oszillators wird das dynamische Verhalten des Schwingkreises kontrolliert. Für kleine Widerstandswerte fließt ein Großteil des Stromes aus dem negativen Widerstand direkt über den Widerstand  $R$  ab, wohingegen für

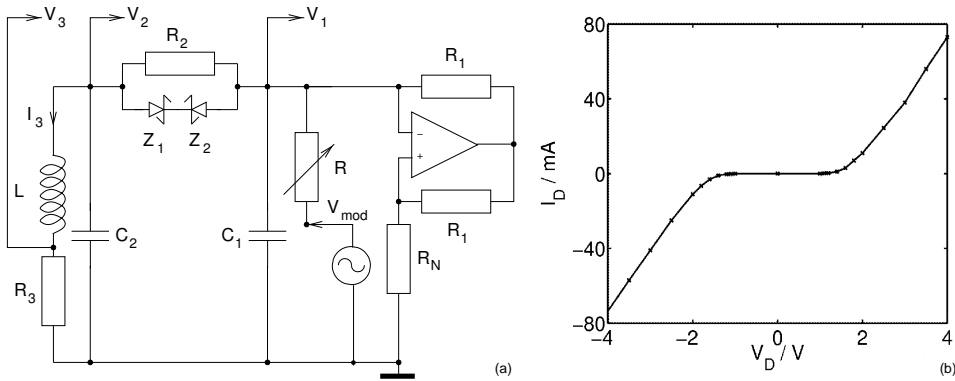


Abbildung 2.1: (a) Schaltungsdiagramm des Shinriki-Schwingkreises. Die Spannungen  $V_i$  sind die Observablen des Systems,  $V_{mod}$  die eingekoppelte Modulation zur Untersuchung von stochastischer Resonanz und rauschinduzierten Krisen. (b) Gemessene Strom-Spannungscharakteristik der beiden Zenerdioden im Versuchsaufbau.

größere Werte dieses Kontrollparameters der Schwingkreis periodische und chaotische Dynamik zeigt.

Für die Untersuchung rauschinduzierter Krisen und stochastischer Resonanz wurde der Schwingkreis modifiziert, so dass nach dem Kontrollparameter  $R$  eine weitere Spannung eingekoppelt werden kann<sup>1</sup>. Diese zusätzliche Spannung  $V_{mod}$  variiert das "Erd-Potential" gegen das  $V_1$  über den Kontrollparameter  $R$  abfällt.

In Tabelle 2.1 finden sich typische Bauteile und die Dimensionierung von Widerständen u.ä. für zwei Realisierungen dieses Schwingkreises. Von den beiden vorgestellten Möglichkeiten erwies sich der Oszillator mit einer Eigenfrequenz von 630Hz als geeigneter, da er ein geringeres intrinsisches Rauschen aufweist als der eine Größenordnung schnellere.

Die Differentialgleichungen des Shinriki-Oszillators ergeben sich durch Anwenden der Kirchhoff'schen Knoten- und Maschenregeln auf den Schaltplan in Abb. 2.1(a):

$$\begin{aligned}
 C_1 \dot{V}_1 &= \left( \frac{1}{R_N} - \frac{1}{R} \right) V_1 - f(V_1 - V_2) \\
 C_2 \dot{V}_2 &= f(V_1 - V_2) - I_3 \\
 L \dot{I}_3 &= -R_3 I_3 + V_2.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Hierbei sind  $V_1$  und  $V_2$  die im Schaltplan angegebenen Messspannungen und  $I_3$  der Strom durch die Spule, aus dem sich die gemessene Spannung  $V_3$  ergibt.

<sup>1</sup>Sowohl die Observablen  $V_i$  als auch die Modulationsspannung sind durch eine zusätzliche Op-Schaltung vom Schwingkreis entkoppelt, um Störungen der Dynamik durch die Messapparatur bzw. den Funktionsgenerator auszuschließen. Der genaue Aufbau dieser Ein- und Auskopplungsschaltungen findet sich in Anhang A

Baugruppe	Bauteil	Wert/Art		Einheit/Typ
NIC	Op-Verstärker	AD711JN	AD711JN / 847JN	Typ.-Nr.
	$R_N$	8,2	6,8	k $\Omega$
	$R_1$	4,7	4,7	k $\Omega$
Kontrollparameter	$R$	variabel Xicor102/3	variabel Potentiometer	$\Omega$
Nicht-linearität	$Z_{1,2}$	BZX85C3V3	CZ2V4	Typ.-Nr.
	$R_2$	15	15	k $\Omega$
Oszillator	$C_1$	10	1	nF
	$C_2$	100	10	nF
	$L$	270	27	mH
	$R_3$	100	100	$\Omega$
Frequenz	$\nu$	$\approx 0.63$	$\approx 6.3$	kHz

Tabelle 2.1: Komponentenliste für zwei typische Realisierungen des Shinriki-Schwingkreises und resultierende Eigenfrequenzen. Wegen geringeren intrinsischen Rauschens wurde für die experimentelle Untersuchung der Schwingkreis mit der Eigenfrequenz 630Hz benutzt. Bei diesem Schwingkreis wurde der gewöhnliche variable Widerstand  $R$  durch eine Reihenschaltung von digital ansteuerbaren Widerständen (Xicor) [15] ersetzt, um die Messung zu automatisieren.

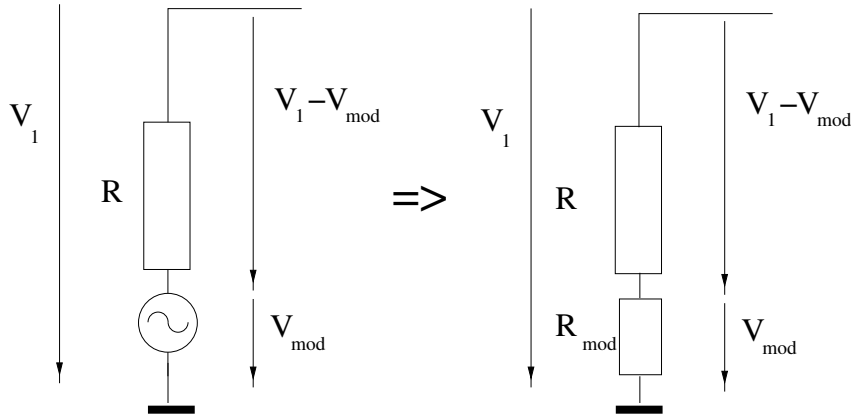


Abbildung 2.2: Ersatzschaltbild für die Berechnung des Widerstands  $R_{mod}$ : Die Spannung  $V_{mod}$  führt zu einer Verschiebung des Erdpotentials, gegen das  $V_1$  über  $R$  abfällt. Mit Hilfe der Kirchhoff'schen Maschen- und Knotenregeln kann die Modulationsspannung in einen effektiven Modulationswiderstand umgerechnet werden.

Der Strom durch die Zenerdioden und den Widerstand  $R_2$  wird in den Flussgleichungen durch die nichtlineare Funktion  $f(V_1 - V_2) = f(\Delta V)$  beschrieben. Dieser Strom kann durch die experimentelle Strom-Spannungskennlinie der Zener-Dioden in Abb. 2.1(b) analytisch approximiert werden. Für die verwendeten Dioden ergibt sich ein punktsymmetrischer Verlauf dieses Stroms als Funktion der Spannungsdifferenz  $\Delta V$ . Wird  $|\Delta V|$  größer als die Durchbruchspannung der Zenerdioden ( $V_Z = 1.45V$ ), antwortet das System nichtlinear. Der Strom durch die Zenerdioden und den Widerstand  $R_2$  kann aus den Messdaten durch die folgende Funktion genähert werden:

$$I_{NL} = f(\Delta V) = f_Z(\Delta V) + \frac{\Delta V}{R_2} \quad (2.2)$$

$$f_Z(\Delta V) = \begin{cases} 0 & \text{für } |\Delta V| < V_Z \\ \text{sign}(\Delta V) \cdot \tilde{f}(\Delta V_Z) & \text{für } |\Delta V| \geq V_Z \end{cases}$$

$$\tilde{f}(\Delta V_Z) = |A(\Delta V_Z)^3| + B(\Delta V_Z)^4 + |C(\Delta V_Z)^5|.$$

Aus der gemessenen Strom-Spannungscharakteristik in Abb. 2.1(b) ergeben sich die Parameter dieser Näherung zu:  $A = 1.42(V^2\Omega)^{-1}$ ,  $B = -0.418(V^3\Omega)^{-1}$ ,  $C = 0.031(V^4\Omega)^{-1}$ ,  $V_Z = 1.45V$  und  $\Delta V_Z = |\Delta V| - V_Z$ .

Die zusätzlich eingekoppelte Spannung  $V_{mod}$  wirkt sich in der Flussgleichung (2.1) als additiver Widerstand  $R_{mod}(t)$  aus, der den Kontrollparameter  $R$  zeitlich moduliert:  $R(t) = R + R_{mod}(t)$ . Um die Größe des Ersatzwiderstandes zu berechnen, müssen die Kirchhoff'schen Gesetze auf Abb. 2.2 angewandt werden. In der Abbildung wird die Situation bei eingeschalteter Modulation skizziert. Durch die zusätzliche Spannung  $V_{mod}$  fällt am Widerstand  $R$  nicht mehr  $V_1$  sondern die Differenz

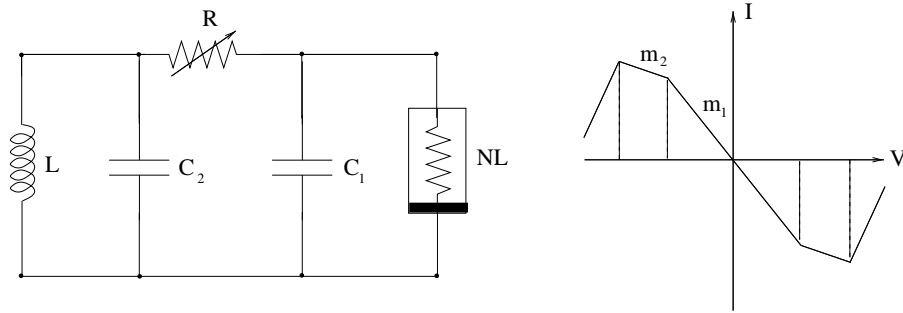


Abbildung 2.3: Schaltplan und Nichtlinearität des Chua-Oszillators. Ähnlich wie der Shinriki-Oszillator ist beim Chua-Oszillator ein gewöhnlicher Schwingkreis ( $LC_2$ ) mit einer weiteren Kapazität ( $C_1$ ) gekoppelt. Die Kopplung ist linear über den veränderbaren Widerstand  $R$ . Die Nichtlinearität (NL) besteht aus zwei gegeneinander geschaltete NIC-Elemente, welche die links dargestellte Strom-Spannungscharakteristik erzeugen

$V_1 - V_{mod}$  ab. Folglich ist der Strom  $I$  durch den Widerstand:  $I = (V_1 - V_{mod})/R$ . Hierdurch ergibt sich der Ersatzwiderstand zu:

$$R_{mod} = \frac{V_{mod}}{I} = R \frac{V_{mod}}{V_1 - V_{mod}}. \quad (2.3)$$

Wie man sieht, ist die Wirkung der Modulation sowohl von  $V_1$  als auch vom Wert des Kontrollparameters  $R$  abhängig. Liegt zwischen  $V_1(t)$  und  $V_{mod}(t)$  eine hinreichende Zeitskalenseparation vor, kann die explizite Zeitabhängigkeit der schnellen Dynamik durch einen effektiven Mittelwert ersetzt werden. In den angesprochenen Anwendungen – den Untersuchungen zur stochastischen Resonanz und zur rauschinduzierten Krise – ist diese Zeitskalenseparation gegeben.

Der vorgestellte Oszillator gehört zur Klasse der Chua-Schwingkreise. Die Flussgleichungen der einzelnen Oszillatoren der Klasse lassen sich auf die folgende Form transformieren [16]:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - f(x - y) \\ b(f(x - y) - z) \\ d(y - cz) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Der Zusammenhang zwischen den Kenngrößen der Schaltungen und der Transformation im Spezialfall des Shinriki-Oszillators ist:

$$\begin{aligned} x &= \frac{V_1}{V_D} & y &= \frac{V_2}{V_D} & z &= \frac{R_3 I_3}{V_D} \\ a &= 1 - \frac{R_N}{R} & b &= \frac{C_1}{C_2} & c &= \frac{R_3}{R_N} & d &= \frac{C_1 R_N^2}{L} \end{aligned}$$

Der von Chua et. al vorgeschlagene Oszillator [17] (vgl. Abb. 2.3) ist der am häufigsten untersuchte Schwingkreis dieser Familie. Er unterscheidet sich vom Shin-

riki-Oszillator im Wesentlichen durch die nichtlineare Funktion  $f$ , die aus zwei gegeneinander geschaltete NIC-Elementen aufgebaut ist. Aus dieser Verschaltung resultiert eine stückweise linearer Verlauf von  $f$ . Die Strom-Spannungscharakteristik der Nichtlinearität ist auch in Abb. 2.3 dargestellt. Die charakteristischen Punkte, an denen die Steigung von  $m_1$  auf  $m_2$  übergeht bzw. die Strom-Spannungscharakteristik wieder abfällt, lassen sich durch die Wahl der Widerstände in den NIC-Elementen verändern. Für experimentelle Untersuchungen zur kriseninduzierten Intermittenz eignet sich dieser Schwingkreis nicht. Der beobachtbare Bereich kriseninduzierter Intermittenz erweist sich in realen Experimenten mit dem Chua-Oszillator als sehr klein. Für diese Untersuchungen müsste der Widerstand  $R$  in einem schmalen Bereich von  $100\Omega$  verändert werden. Im Shinriki-Oszillator dagegen ist der Bereich mehrere  $10k\Omega$  groß. Deshalb wurden die Experimente ausschließlich am Shinriki-Oszillator durchgeführt, wohingegen die Flussgleichung des Chua-Systems für numerische Untersuchungen benutzt wurden. Diese Flussgleichungen ergeben sich durch Anwenden der Kirchhoff'schen Regeln zu:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{C1} &= \frac{1}{RC_1} \left[ (V_{C2} - V_{C1}) - \frac{1}{C_1} f(m_1, m_2, V_{C1}) \right] \\ \dot{V}_{C2} &= \frac{1}{RC_2} (V_{C1} - V_{C2}) + I_L \\ \dot{I}_L &= -\frac{1}{L} V_{C2} \\ f &= (m_1 V_{C1} + \frac{(m_2 - m_1)}{2} |V_{C1} + BP| - |V_{C1} - BP|).\end{aligned}\tag{2.5}$$

Mit  $V_{C1}$  und  $V_{C2}$  bezeichnen die Spannungen an den Kondensatoren  $C_1$  bzw.  $C_2$  und  $I_L$  ist der Strom durch die Spule  $L$ . Für die numerischen Untersuchungen wurde  $C_1 = 1/9$ ,  $C_2 = 1$ ,  $L = 1/7$ ,  $m_1 = -0.8$ ,  $m_2 = -0.5$  und  $BP = 1$  gewählt.  $BP$  bezeichnet den Punkt der nichtlinearen Strom-Spannungscharakteristik, an dem die Steigung von  $m_1$  auf  $m_2$  wechselt. Durch die Wahl dieser Parameter stimmt das dynamische Verhalten des Chua-Oszillators mit dem des Shinriki-Oszillators weitgehend überein.

## 2.2 Dynamisches Verhalten

Der Shinriki-Oszillator zeigt eine Reihe von Bifurkationen und unterschiedliche chaotische Attraktoren, die anhand von Phasenraumdarstellungen und Bifurkationsdiagramm diskutiert werden sollen. In Abb. 2.4 sind die Phasenraumdarstellungen ausgewählter Attraktoren mit ihren zugehörigen  $V_1$ -Zeitreihen und Spektren dargestellt. Die Attraktoren sind typisch für den Shinriki-Oszillator und beschreiben seine Dynamik jeweils für einen weiten Parameterbereich.

Die erste Reihe von Phasenraumdarstellung, Zeitreihe und Spektrum wurde bei einem niedrigen Wert des Kontrollparameters ( $R = 31k\Omega$ ) gemessen. Im Phasenraum sehen wir einen Periode 1-Orbit, dessen Zeitreihe nur positive  $V_1$ -Werte mit



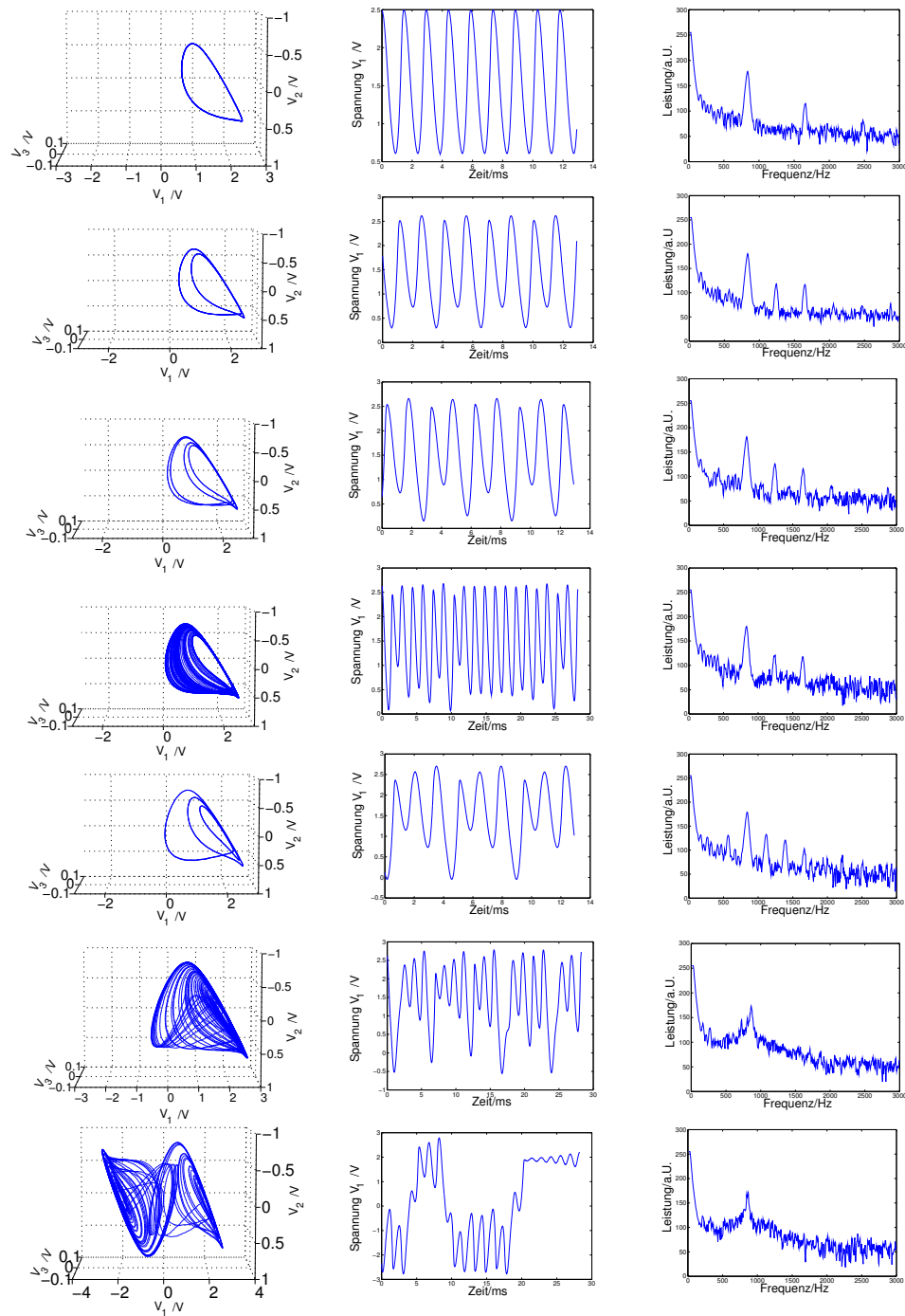


Abbildung 2.4: Phasenraumdarstellung, Zeitreihen und Spektren des Shiniki-Systems bei unterschiedlichen Kontrollparameterwerten  $R$ . Von oben nach unten: Periode 1 ( $R = 31\text{k}\Omega$ ), Periode 2 ( $R = 50\text{k}\Omega$ ), Periode 4 ( $R = 53\text{k}\Omega$ ), erster chaotischer Attraktor ( $R = 54.5\text{k}\Omega$ ), Periode 3-Fenster ( $R = 57\text{k}\Omega$ ), monoscroll-Attraktor ( $R = 65\text{k}\Omega$ ), double-scroll-Attraktor ( $R = 68\text{k}\Omega$ ).

einer Frequenz von ca.  $\nu_G = 630\text{Hz}$  zeigt. Bei Erhöhung des Kontrollparameters auf  $50\text{k}\Omega$  bzw.  $53\text{k}\Omega$  hat der Oszillator einen Periode 2- bzw. 4-Orbit (zweite und dritte Reihe der Abbildung). Für den Periode 2-Orbit ist der entsprechende Peak bei der doppelten Grundfrequenz  $\nu_G$  deutlich sichtbar. Dahin gegen ist der Peak bei dem Vierfachen von  $\nu_G$  für den Periode 4 Orbit nur noch im Rauschuntergrund erahnbar. Der Shinriki-Oszillator zeigt den Periodenverdopplungsweg ins Chaos. Bei einem Kontrollparameterwert von  $R = 54.5\text{k}\Omega$  tritt ein chaotischer Attraktor im Phasenraum auf. Entsprechend zeigt die Fouriertransformierte der chaotischen Zeitreihe (in der vierten Reihe) ein breites Spektrum um die Grundfrequenz herum. Für  $R = 57\text{k}\Omega$  existiert wieder eine nicht chaotische Lösung mit einem Periode 3-Orbit. Der chaotische Attraktor, der sich nach weiterer Kontrollparametererhöhung zeigt ( $R = 65\text{k}\Omega$ , untersten Reihe) unterscheidet sich deutlich vom chaotischen Attraktor, der auf die Periodenverdopplungskaskade folgte (vgl. vierte Reihe von oben): Die  $V_3$ -Komponente des Attraktors ist nach dem Periode 3-Orbit deutlich angewachsen und führt zu einem Einrollen des Attraktors. Aufgrund dieser Topologie wird der Attraktor auch *monoscroll*-Attraktor genannt. In der Zeitreihe liegt die minimale Auslenkung bei negativen Werten von  $V_1$ , und auch das Spektrum ist deutlich breiter als bei dem vorhergehenden chaotischen Attraktor. Die letzte Reihe der Abbildung für  $R = 68\text{k}\Omega$  zeigt einen so genannten *doublescroll*-Attraktor, der durch die Verschmelzung zweier symmetrischer monoscroll-Attraktoren entstanden ist. Dieser doublescroll-Attraktor tritt plötzlich im Phasenraum oberhalb von ca.  $66\text{k}\Omega$  auf. Diese plötzliche Veränderung des Phasenraumvolumens eines Attraktors wird Krise genannt. Beim Shinriki-Oszillator beobachtet man oberhalb der Krise ein intermittentes Springen zwischen den beiden Teilattraktoren. Dieses Springen ist deutlich in der Zeitreihe erkennbar und wird im Folgenden Kapitel genauer analysiert.

Zur quantitative Analyse des experimentellen Systems wurde ein Bifurkationsdiagramm ausgemessen. Hierbei beschränkt sich der Bereich der Messung auf die Kontrollparameterwerte, bei denen der Schwingkreis dynamische Lösungen besitzt. Unterhalb des dargestellten Bereichs hat das System für  $R = 0\Omega$  einen stabilen Fixpunkt bei  $V_i = 0$ . Wird der Kontrollparameter erhöht, wird der Fixpunkt instabil und es entstehen zwei weitere stabile Fixpunkte, die bei weiterer Kontrollparametererhöhung auseinander laufen. Abhängig von den Anfangsbedingungen relaxiert das System auf einem der beiden stabilen Fixpunkte im Phasenraum. Oberhalb von  $R \approx 28\text{k}\Omega$  beginnt – nach einer Hopf-Bifurkation des stabilen Fixpunktes – der Bereich der Autooszillationen für den das in Abb. 2.5 dargestellte Bifurkationsdiagramm gemessen wurde. In dieser Abbildung ist die minimale Spannung von  $V_1$  als Funktion des Kontrollparameters dargestellt. Wie man sieht, führten in diesem Fall die Anfangsbedingungen dazu, dass der stabile Fixpunkt bei  $V_1 > 0$  auftritt und somit das Bifurkationsszenarium für positive  $V_1$  verfolgt wird.

Wie bereits gezeigt, durchläuft der Schwingkreis den typischen Weg ins Chaos über Periodenverdopplungsbifurkationen. Auch im Bifurkationsdiagramm sind die Grenzyklen der Periode 1 bis 4 deutlich erkennbar. Anhand der experimentellen

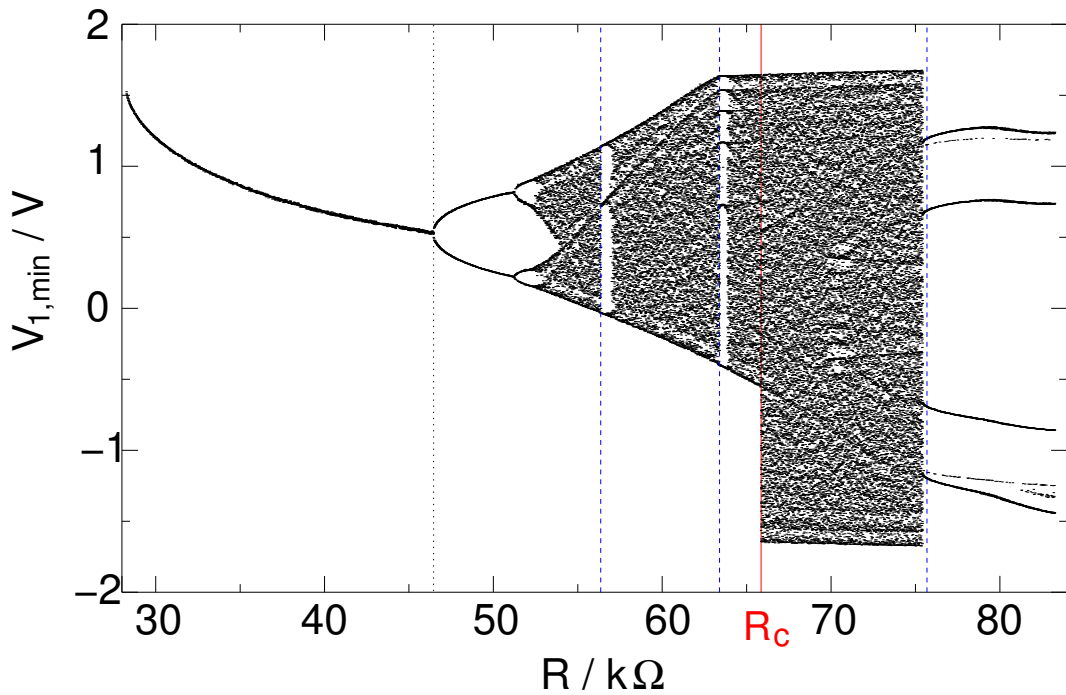


Abbildung 2.5: Bifurkationsdiagramm des Shinriki-Schwingkreises im Bereich der Autooszillationen. Das Minimum der Spannung  $V_1$  ist gegen den Kontrollparameter  $R$  aufgetragen. Die schwarze Linie zeigt die erste Periodenverdopplung an. Periodische Fenster im chaotischen Attraktor sind mit blauen Linien hervorgehoben. Die signifikante spontane Änderung des Phasenraumvolumens des Attraktors bei  $R \approx 66 \text{ k}\Omega$  wird durch eine Verschmelzkrise verursacht (rote Linie).

Daten konnten die Feigenbaumkonstanten  $\alpha$  und  $\delta$  des experimentellen System abgeschätzt werden. Vor dem Übergang zu einer chaotischen Dynamik zeigt sich im Experiment als letztes Fenster der Periode 4-Orbit. Für eine genaue Bestimmung der Feigenbaumkonstanten reicht dies nicht aus. Als Näherungswerte ergaben sich  $\alpha \approx 2.4$  und  $\delta = 4.2$ . Beide Werte liegen damit deutlich unter den theoretischen Werten von  $\alpha_{\text{th}} = 2.502 \dots$  und  $\delta_{\text{th}} = 4.669 \dots$  [18], die sich für eine unendlich lange Bifurkationsabfolge ergibt.

Nach der Periodenverdopplungskaskade wird das System oberhalb von  $R \approx 52 \text{ k}\Omega$  chaotisch. Dieser erste chaotische Bereich endet in einem Periode 3-Orbit, der aus einer Tangenten-Bifurkation hervorgeht. Nach diesem periodischen Bereich wird, wie wir an den Phasenraumdarstellungen gesehen haben, die Topologie des chaotischen Attraktors komplexer, und er beginnt sich im Phasenraum „ein zudrehen“, was zur monoscroll-Attraktortopologie führt (vgl. zweitunterste Darstellung in Abb. 2.4). Im Bereich des monoscroll-Attraktors treten noch weitere periodische Fenster auf, von denen nur noch eines oberhalb von  $R = 63 \text{ k}\Omega$  im Bifurkationsdiagramm sichtbar ist, bevor das System bei  $R \approx 66 \text{ k}\Omega$  das typische Merkmal einer Krise

aufweist: Bei kleiner Änderung des Kontrollparameter kommt es zu einer signifikanten Änderung des Attraktorvolumens im Phasenraum. Die Krise tritt auf, wenn der Attraktor um den hyperbolischen Fixpunkt bei  $V_1 > 0$  mit dem Einzugsgebiet des symmetrischen Zwillingsattraktors um den hyperbolischen Fixpunkt bei  $V_1 < 0$  kollidiert. Dies geschieht, wie das Bifurkationsdiagramm zeigt, bei dem kritischen Kontrollparameterwert  $R = R_c \approx 66\text{k}\Omega$ .

Anschließend beobachtet man, dass das System intermittent zwischen diesen beiden Subattraktoren des durch Verschmelzung entstandenen doublescroll-Attraktors hin und her springt (vgl. letzte Reihe in Abb. 2.4). Man bezeichnet diesen Krisentyp als Verschmelzkrise. Für die Verschmelzkrise und den Bereich der kriseninduzierten Intermittenz ist die Symmetrie der Nichtlinearität von besonderer Bedeutung. Wurden beim Aufbau des Oszillators Zenerdioden mit zu großen Abweichungen voneinander verwendet, geschieht die Kollision zwischen den Attraktoren und Einzugsgebieten nicht beim gleichen kritischen Kontrollparameter Wert  $R_c$ , und einer der beiden Subattraktoren besitzt im Bereich der kriseninduzierten Intermittenz eine höhere Aufenthaltswahrscheinlichkeit. Deswegen wurde bei der experimentellen Umsetzung Wert auf ein symmetrisches Diodenpaar gelegt (vgl. Abb. 2.1(b)). Auch im Bereich des doublescroll-Attraktors treten zwei periodische Fenster im chaotischen Bereich auf, wobei im Bifurkationsdiagramm nur das letzte sichtbar ist.

## Kapitel 3

# Statistische Eigenschaften der Verschmelzkrise

Die statistischen Eigenschaften eines dissipativen, chaotischen Systems mit krisen-induzierter Intermittenz lassen sich in zwei Gruppen unterteilen:

- Allgemeine statistische Eigenschaften der Trajektorie auf dem chaotischen Attraktor, die durch Lyapunov-Exponenten und Autokorrelationsfunktion beschrieben werden und
- statistische Eigenschaften, die das System auf der deutlich langsameren Zeitskala des Intermittenz-Phänomens beschreiben.

In diesem Kapitel werde ich die statistischen Kenngrößen für chaotische und intermittente Systeme kurz vorstellen. Anhand von Messungen und Analysen vor und nach der Verschmelzkrise werden die statistischen Eigenschaften am Shinriki-Oszillator direkt ausgewertet.

### 3.1 Allgemeine statistische Eigenschaften chaotischer Systeme

Im Prinzip kann die Vergangenheit, der gegenwärtige Zustand und die Zukunft jedes deterministischen Flusses  $\dot{x} = f(x, t)$  berechnet werden, wenn man zu einem Zeitpunkt  $t_0$  den Zustand  $x_0 = x(t_0)$  kennt. Bei stochastischen Systemen ist dies nicht möglich, denn der momentane Zustand spiegelt neben den Anfangsbedingungen eine *bestimmte* Realisierungsabfolge der stochastischen Kraft  $\xi(t)$  wieder.

Trotzdem kann ein deterministisches System mit chaotischer Dynamik auf den ersten Blick wie ein stochastisches System wirken, wenn die Zeitreihe mit einer zu niedrigen Zeitauflösung gemessen wurde. Ein Maß, das dies eindrücklich demonstriert, ist die Autokorrelationsfunktion:

$$C_{x,x}(\tau_a) = \frac{\langle (x(t + \tau_a) - \langle x \rangle)(x(t) - \langle x \rangle) \rangle}{\langle (x(t) - \langle x \rangle)^2 \rangle}. \quad (3.1)$$

Dabei bezeichnet  $\langle \cdot \rangle$  das Zeitmittel. Die Autokorrelationsfunktion  $C_{x,x}$  misst die Ähnlichkeit zwischen dem zeitlichen Verlauf einer Zeitreihe mit sich selbst, wenn diese um den Wert  $\tau_a$  verzögert ist. Ihren größten Wert nimmt sie für  $\tau_a = 0$  an. Aus der Definition folgt sofort  $C_{x,x}(0) = 1$ . Für periodische Zeitreihen ist die Autokorrelationsfunktion ebenfalls eine periodische Funktion mit der Frequenz der Zeitreihe. Bei stochastischen und chaotischen Zeitreihen zerfällt  $C_{x,x}$  bei Erhöhung der Zeitverschiebungen  $\tau_a$ .

Dieser typische Zerfall ist in Abb. 3.1 zu sehen. Neben der Autokorrelationsfunktion, die in Abhängigkeit von  $\tau_a$  in Samplingschritten  $\Delta t$  aufgetragen wurde, ist in der linken Spalte die entsprechende Zeitreihe des Systems dargestellt. Teil (a) zeigt den Verlauf eines bistabilen stochastischen Systems bei niedriger Rauschstärke. Obgleich die Varianz des Rauschens bei der numerischen Simulation weniger als die Hälfte der Potentialbarriere zwischen den Zuständen betrug, zerfällt die Autokorrelation sehr schnell und oszilliert oberhalb von  $\tau_a = 500\Delta t$  zwischen  $-0.1$  und  $0.1$ . Einen ganz ähnlichen Verlauf zeigt die  $x_1$ -Komponente des Chua-Systems (2.5) im Intermittenzbereich bei einem Kontrollparameter von  $R = 1.372$  in den oben genannten Einheiten. Schon die Zeitreihe zeigt, dass es bei diesem Wert von  $R$  zu deutlich mehr Sprüngen kommt, als im stochastischen System. Dies führt zu einem Verlauf von  $C_{x,x}$ , der bereits unterhalb von  $\tau_a = 100$  betragsmäßig um Werte  $< 0.1$  oszilliert.

In Abb. 3.1 (c) und (d) ist die Autokorrelationsfunktion für Zeitreihen des Shinriki-Oszillators bei  $R - R_c = 2.2k\Omega$  abgebildet. Für (c) wurde die  $V_1$ -Zeitreihe und für (d) die  $V_3$ -Zeitreihe verwendet, die beide simultan gemessen wurden. Bei diesem Kontrollparameterwert ist die Sprunghäufigkeit zwischen den beiden Subatraktoren, bei vergleichbarer Zeitaufösung der Oszillationen, nicht so häufig wie beim Chua-System aus Abb. 3.1(b). Deshalb zerfällt die Autokorrelationsfunktion in Abb. 3.1(c) erst für  $\tau_a \geq 500$  auf einen Betrag unter  $0.1$ . Auffällig ist bei diesem Verlauf, dass  $C_{x,x}$  ähnlich wie die stochastische Zeitreihe keine deutlich negativen Werte aufweist. Bei  $C_{x,x}$  der  $V_3$ -Komponente (Abb. 3.1 (d)) ist diese typische Oszillation einer Autokorrelationsfunktion zwischen negativen und positiven Werten sehr deutlich. Der Zerfall auf einen Betrag unterhalb von  $0.1$  ist allerdings sehr viel langsamer als bei der  $V_1$ -Komponente des Systems.

Der vergleichbare Zerfall der Autokorrelation in stochastischen und deterministischen Systemen mit chaotischer Dynamik ist auf einen Informationsverlust im letzteren zurückzuführen. Die Ursache hierfür liegt an der chaotischen Dynamik auf dem seltsamen Attraktor, die am besten mit den Schlagworten „Strecken und Falten“ beschrieben werden kann. So laufen zwei Realisierungen der chaotischen Dynamik exponentiell auseinander, wenn ihre Anfangsbedingungen geringfügig voneinander abweichen ( $x_{0,1} - x_{0,2} = \delta x(0)$ ).

$$|\delta x(t)| = \exp(\lambda t) |\delta x(0)|, \quad (3.2)$$

wobei die mittlere Rate  $\lambda$  dieser Expansion der Lyapunov-Exponent [19, 20, 21] ist. Ein chaotisches System hat mindestens einen positiven Lyapunov-Exponenten. Alle

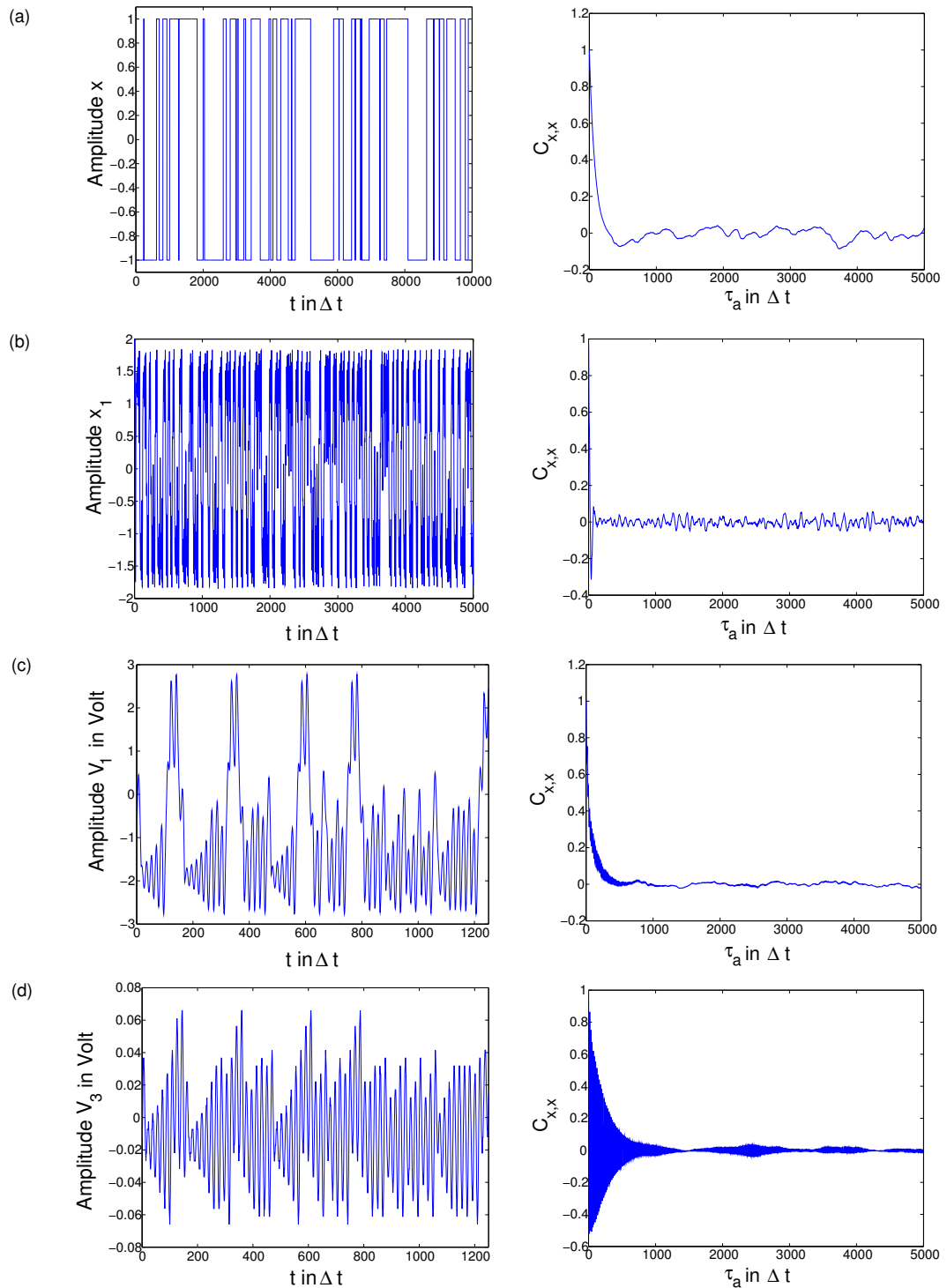


Abbildung 3.1: Verlauf der Autokorrelationsfunktion  $C_{x,x}(\tau_a)$  für (a) ein bistabiles System mit stochastischem Antrieb, (b) die  $x_1$ -Komponente des Chua-Systems bei  $G = 0.7289$ , (c) die  $V_1$ - und (d)  $V_3$ -Komponente des Shinriki-Oszillators bei  $R - R_c = 2.2\text{k}\Omega$ . Neben der Autokorrelationsfunktion ist in der linken Spalte ein Ausschnitt der jeweiligen Zeitreihe dargestellt. Bei der numerischen Simulation der Zeitreihe in (b) wurde ca. 20 Punkte pro Periode berechnet. Dieser Wert stimmt ungefähr mit der zeitlichen Auflösung der in (c) und (d) dargestellten Daten überein.

Lyapunov-Exponenten lassen sich berechnen, indem man für die kleine Störung  $\delta x_0$  den Fluss linearisiert:

$$\delta x_i(t) = \sum_{j=1}^d \mathcal{J}(x_0)_{ij} \delta x_{0j} \quad (3.3)$$

$$\mathcal{J}(x_0)_{ij} = \frac{\partial x_i(t)}{\partial x_{0j}} \quad (3.4)$$

dabei läuft die Summe über alle  $d$  Dimensionen des Flusses  $\dot{x} = f(x)$  und  $\mathcal{J}$  ist die Jacobi-Matrix. Die Wirkung der Jacobi-Matrix auf eine kleine Umgebung um  $x_0$  kann anschaulich als die Deformation dieser im zeitlichen Verlauf verstanden werden. Ihre Eigenvektoren und -werte geben die Richtung und die Stärke der Expansion bzw. Kontraktion wieder und sind somit direkt mit der gegebenen Definition der Lyapunov-Exponenten (3.2) verknüpft. Durch das Auseinanderlaufen werden kleine Abstände auf dem Attraktor gestreckt, weshalb diese Eigenschaft chaotischer Systeme auch als *Sensitivität bezüglich der Anfangsbedingungen* bekannt ist.

Andererseits ist der Phasenraum, den ein seltsamer Attraktor einnimmt, beschränkt und aufgrund der Deterministik der Dynamik kann die Trajektorie sich nicht auf dem Attraktor schneiden. Diese beiden anscheinend gegensätzlichen Bedingungen – exponentielles Auseinanderlaufen und Begrenzung im Phasenraum – lassen sich durch einen weiteren Mechanismus der chaotischen Dynamik vereinbaren: Das Mischen oder Falten. Hierbei werden zwei entfernte Punkte im Phasenraum an eng benachbarte Punkte zurückgefaltet. Das Mischen lässt sich bereits in den Phasenraumdarstellungen von monoscroll- und doublescroll-Attraktor des Shinriki-Oszillators sehen. Betrachtet man z.B. den monoscroll-Attraktor des Shinriki-Systems bei  $R = 65\text{k}\Omega$  in Abb. 2.4, so verweilt die Trajektorie die meiste Zeit auf einem Attraktor, der dem bei  $R = 54.5\text{k}\Omega$  ähnelt. Die Trajektorienabschnitte mit hohen Werten von  $V_3$ , die den monoscroll-Attraktor ausmachen, werden vergleichsweise kurz besucht und die Trajektorie anschließend wieder auf den nahezu, 2-dimensionalen Attraktor zurückgefaltet.

Das Auseinanderlaufen benachbarter Punkte im Phasenraum und das Zurückfalten führen zu einem Informationsverlust. Mit Hilfe der Kolmogorov-Sinai Entropie  $h_{\text{KS}}$  lässt sich die Unordnung in chaotischen Systemen messen, die zum Informationsverlust führt. Diese Entropie ist identisch mit der Summe der positiven Lyapunov-Exponenten.

Die Lyapunov-Exponenten  $\lambda_i$  und die Autokorrelationsfunktion  $C_{x,x}$  kennzeichnen die dynamische Seite des Chaos. Das zeitliche Verhalten hat seine Entsprechung in der Geometrie des Attraktors, der durch die Trajektorie des Systems geformt wird. Der Attraktor eines dissipativen chaotischen Systems besitzt auf allen räumlichen Skalen eine selbstähnliche Struktur, auch wenn diese für reale Systeme mit einem intrinsischen Rauschen meist nach wenigen Vergrößerung nicht mehr erkennbar ist [22]. Diese fraktale Struktur geht einher mit einer nichtganzzahligen Dimension des Attraktors. Für einen Fluss muss aufgrund des Determinismus, der



einen Schnitt der Trajektorie mit sich selbst verbietet, die Dimension  $D > 2$  sein. Für die Quantifizierung der Selbstähnlichkeit eines Attraktors bieten sich zahlreiche Wege zur Berechnung einer Dimension an. Eine dieser Möglichkeiten ist die Korrelationsdimension, die sich aus der Korrelationssumme:

$$C(\epsilon) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \Theta(\epsilon - \|x_i - x_j\|) \quad (3.5)$$

berechnen lässt. Dabei bezeichnet  $\Theta$  die Stufenfunktion. Diese bewirkt, dass nur die Wertepaare zur Summe beitragen, deren Abstand auf dem  $d$ -dimensionalen Attraktor kleiner als  $\epsilon$  ist. Der Zusammenhang zwischen Korrelationssumme und Dimension ist  $C \sim \epsilon^D$ , woraus zur Berechnung der Korrelationsdimension folgt:

$$\begin{aligned} D &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} d(N, \epsilon) \quad \text{mit} \\ d(N, \epsilon) &= \frac{\partial \ln C(\epsilon, N)}{\partial \ln \epsilon}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Aus praktischer Sicht lassen sich die beiden Grenzwerte nicht bilden. Für eine sehr lange Zeitreihe mit hoher Amplitudenauflösung ist die ermittelte Dimension  $D$  eine untere Schranke für die tatsächliche.

Durch Lyapunov-Exponenten und Korrelationsdimension kann die Dynamik eines Systems quantitativ zusammengefasst werden. Für die durchgeführten Untersuchungen zur stochastischen Resonanz am Shinriki-Oszillator ist die Analyse von Lyapunov-Exponenten und Korrelationsdimension insbesondere im Bereich nach der Verschmelzkrise von besonderer Bedeutung.

### 3.1.1 Zeitreihenanalyse des Shinriki-Oszillators

Zur Bestimmung des maximalen Lyapunov-Exponenten und der Korrelationsdimension wurde die Standard-Zeitreihenanalyse Software *TISEAN* (TIme SEries ANalysis) von Kantz, Hegger und Schreiber [23] verwendet. In diese Auswerterroutinen wurden verschiedene Zeitreihen des Shinriki-Oszillators für Kontrollparameterwerte oberhalb von  $R_c$  eingelesen. Um eine ausreichende Statistik zu gewährleisten, umfasste jede Zeitreihe ca. 30000 Oszillationen der chaotischen Dynamik. Dabei wurden ungefähr 20 Messpunkte pro Periodendauer aufgezeichnet und der Kontrollparameter  $R$  in Schritten von  $100\Omega$  variiert. Obwohl die Bestimmung der dynamischen und geometrischen Kenngrößen besonderes bei intermittenter Dynamik mit Schwierigkeiten verbunden ist [22], führte die Zeitreihenanalyse aufgrund der hohen Qualität und Länge der Messreihen zu sinnvollen Ergebnissen. Im Folgenden werde ich diese Ergebnisse kurz zusammenfassen.

### Maximaler Lyapunov-Exponent

Aufgrund des 3-dimensionalen Phasenraums des Shinriki-Oszillators besitzt dieses System im chaotischen Bereich nur einen positiven Lyapunov-Exponenten, der

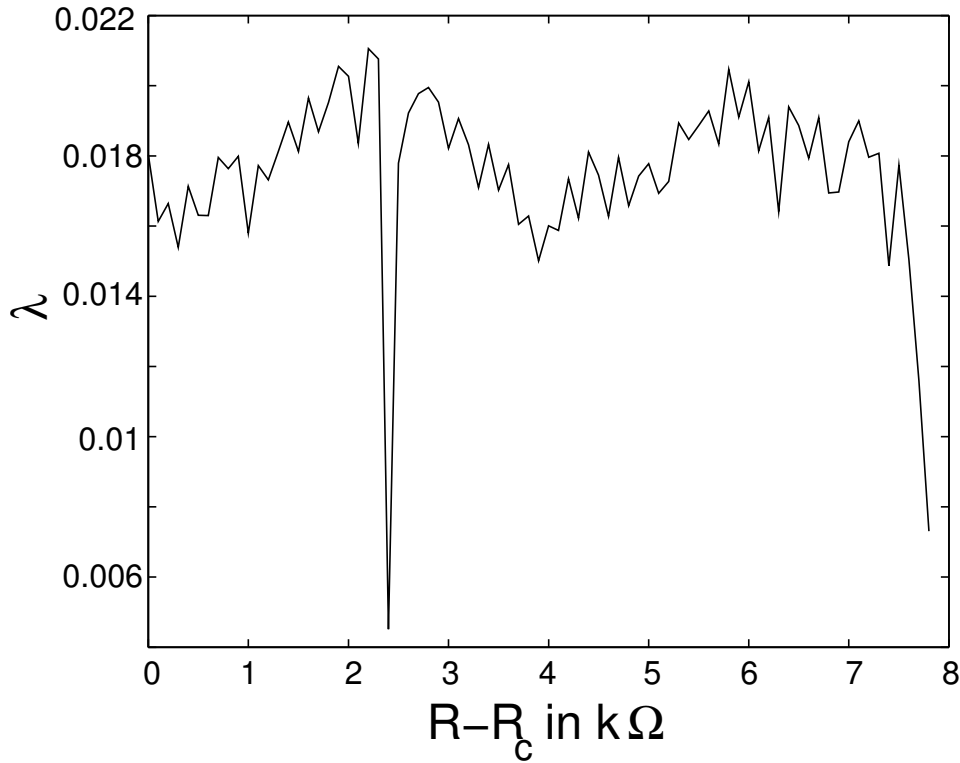


Abbildung 3.2: Maximaler Lyapunov-Exponent  $\lambda$  ( in Einheiten der reziproken Sampling-Zeit  $\Delta t^{-1}$ ) für den Shinriki-Oszillator im Intermittenzbereich bestimmt aus einer 7-dimensionalen Einbettung von  $V_3(t)$ .

folglich mit der Kolmogorov-Sinai Entropie  $h_{KS}$  identisch ist. Die Abhängigkeit des maximalen Lyapunov-Exponenten vom Kontrollparameter  $R$  ist in Abb. 3.2 dargestellt.  $\lambda$  ist in dieser Graphik auf die eingestellte Sampling-Zeit von  $\Delta t = 80\mu s$  normiert aufgetragen. Der Verlauf von  $\lambda$  über dem gesamten Bereich der kriseninduzierten Intermittenz zeigt bei  $R - R_c = 2.3k\Omega$  und  $7.9k\Omega$  zwei niedrige Werte an. Bei dem ersten Kontrollparameterwert ist die Dynamik des Schwingkreises zweigeteilt: Neben der chaotischen Dynamik zeigt die Zeitreihe auch eine periodische Bewegung über beide Subattraktoren. Dieses Verhalten ist typisch für eine Pomeau-Manneville Intermittenz [24], auf die ich weiter unten eingehen werde. Wesentlich für die Bewertung des Wertes von  $\lambda$  ist, dass der Schwingkreis für einen Kontrollparameterwert  $2.2k\Omega < R - R_c < 2.3k\Omega$  ein periodisches Fenster hat. In diesem Fenster ist  $\lambda$  negativ und der geringe Wert bei  $2.3k\Omega$  resultiert aus dem Springen zwischen der periodischen und der chaotischen Phase. Auch der zweite sehr niedrige Wert von  $\lambda$  am Ende des Intermittenzbereichs ist durch den Einfluss eines periodisches Fensters verursacht, das im Bifurkationsdiagramm Abb. 2.5 oberhalb von  $R > 76k\Omega$  zu erkennen ist.

Weiter außerhalb der periodischen Fenster schwankt der Wert für  $\lambda$  nur gering zwischen 0.015 und 0.021. Der statistische Fehler dieser Werte ergibt sich aus der mittleren Anzahl der ausgewerteten Punkte und liegt abhängig vom speziellen Kontrollparameterwert zwischen  $\pm 0.0003$  und  $\pm 0.0007$ . Die Tatsache, dass der Shinriki-Oszillator keinen konstanten Wert für  $\lambda$  im Intermittenzbereich hat, zeigt die nicht-hyperbolische Struktur des Attraktors [20]. Für nicht-hyperbolische Attraktoren führt die Änderung zwischen instabiler und stabiler Mannigfaltigkeit des Attraktors immer zu Änderungen von  $\lambda$ .

Neben dem Lyapunov-Exponenten  $\lambda$  bietet die Lyapunov-Zeit  $T_\lambda$  ein gutes Maß für den Informationsverlust eines dissipativen chaotischen Systems:

$$T_\lambda = \frac{1}{\sum_i \lambda_i}. \quad (3.7)$$

Die Summe in dieser Definition geht dabei über alle positiven Lyapunov-Exponenten. Für den Shinriki-Oszillator mit einem einzigen positiven Lyapunov-Exponenten, ist  $T_\lambda = \lambda^{-1}$ . Die Lyapunov-Zeit ist insofern ein nützliches Maß, als dass sie die Zeitspanne angibt, nach der sich eine kleine Anfangsabweichung durch die Expansion über den kompletten Phasenraum verteilt hat. Für die ermittelten Werte von  $\lambda$  ergibt sich eine Lyapunov-Zeit von  $T_\lambda \approx 48$  bis 67 Datenpunkten. Verglichen mit der Messauflösung der Zeitreihe von ca. 20 Punkten pro Periode bedeutet dieser Wert von  $T_\lambda$ , dass die Trajektorie im Mittel nach zwei bis drei Periodendauern bereits das Gedächtnis an ihren Startpunkt verloren hat.

## Korrelationsdimension

Zur Berechnung der Korrelationsdimension wurden die gleichen Zeitreihen benutzt, die zur Bestimmung von  $\lambda$  verwendet wurden. Das Ergebnis der Auswertung ist in Abb. 3.3 aufgetragen. Oberhalb von  $R - R_c = 7\text{k}\Omega$  konnte keine sinnvolle Dimension mehr ausgewertet werden. Der Verlauf der Korrelationsdimension deckt sich weitgehend mit dem von  $\lambda$ . So zeigt sich im Bereich der Pomeau-Manneville-Intermittenz bei  $R - R_c = 2.3\text{k}\Omega$  ein kleiner Wert der Dimension. Außerhalb davon sind nur kleine Variationen von  $D$  auszumachen. Für diesen ausgedehnten Bereich ergibt sich eine mittlere Dimension von  $D(\epsilon) = 2.42 \pm 0.05$ .

Im Vergleich mit anderen chaotischen Attraktoren, die eine dreidimensionale Flussgleichung und drei instabile Fixpunkte besitzen, zeigt sich eine ähnliche Korrelationsdimension beim Duffing-Attraktor ( $D = 2.5$  [25]). Mit dieser für ein dreidimensionales System hohen Korrelationsdimension liegen diese beiden Attraktoren deutlich über der Dimension des Lorenz-Attraktors [26], dessen Korrelationsdimension knapp über 2 liegt ( $2.05 \pm 0.01$ ).

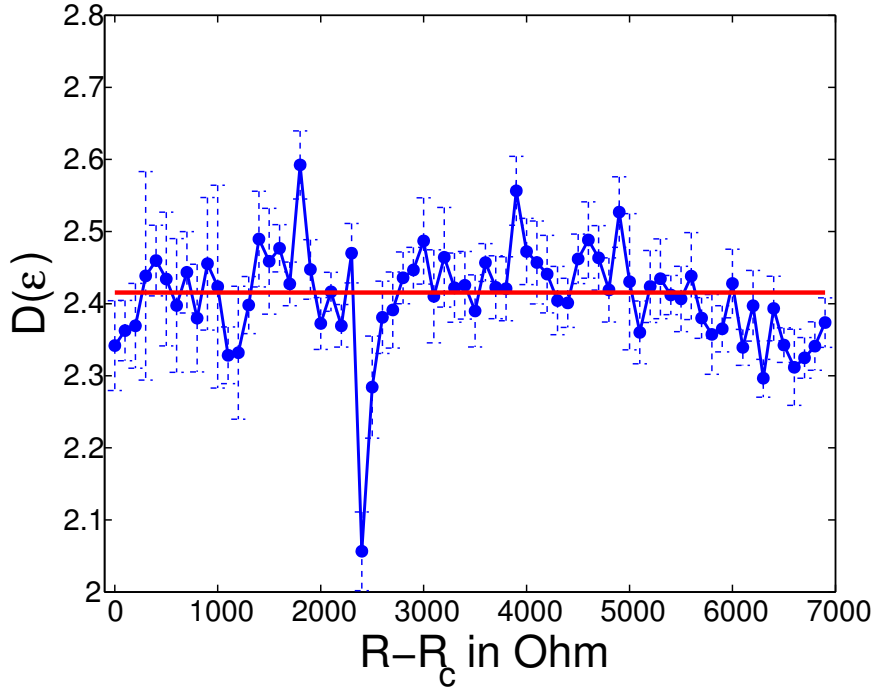


Abbildung 3.3: Korrelationsdimension  $D(\epsilon)$  in Abhängigkeit vom Kontrollparameter  $R - R_c$ . Der Mittelwert von  $D = 2.42 \pm 0.05$  ist durch die rote Linie angedeutet.

### 3.1.2 Ergodische Systeme

Das Langzeitverhalten eines chaotischen Systems ist durch den Attraktor gegeben. Ein detailliertes Bild im statistischen Sinne erhält man durch die invariante Dichte  $\rho$ , die angibt wie häufig ein bestimmter Teil des Attraktors von der Trajektorie aufgesucht wird:

$$\rho(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} dt \delta(x - x(t)). \quad (3.8)$$

Für Abbildungen  $x_{n+1} = f(x_n)$  liefert die Definition der invarianten Dichte bereits eine Entwicklungsgleichung, die Frobenius-Perron-Gleichung [18]:

$$\rho_{n+1}(x) = \int_0^1 dy \delta[x - f(y)] \rho_n(y) \quad (3.9)$$

Sowohl die invariante Dichte als auch der Frobenius-Perron Entwicklungsoperator  $\delta[x - f(y)]$  sind im Allgemeinen keine einfachen Funktionen. So besitzt  $\rho$  oftmals Polstellen an denen die Dichte lokal sehr hoch sein kann [19].

Der große Vorteil des invarianten Maßes  $\rho$  ist, dass  $\rho$  für ergodische Systeme<sup>1</sup> ein

<sup>1</sup>Ob chaotische Systeme als ergodisch angesehen werden können, ist nicht vollständig geklärt. Im Allgemeinen geht man davon aus, dass sie quasi-ergodisch sind. Die Trajektorie eines quasi-

stationäres Wahrscheinlichkeitsmaß ist und damit  $\rho_{n+1} = \rho_n$  wenn  $n \rightarrow \infty$ . Außerdem gilt für ergodische System die Vertauschbarkeit von Orts- und Zeitmittel. Diese Vertauschbarkeit ermöglicht die Berechnung eines Mittelwert der Funktion  $m(x)$  sowohl aus der Zeitreihe als auch aus der invarianten Dichte:

$$\begin{aligned} \langle m(x) \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N m(x_i) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N m(f^i(x_0)) \\ &= \int_0^1 dx \rho(x) m(x). \end{aligned} \quad (3.10)$$

$f^i$  bezeichnet dabei die  $i$ -fache Iteration der Abbildung  $f$ .

Neben der einfachen Berechnung eines Mittelwertes, die bei der Auswertung des Lyapunov-Exponenten und der Korrelationsdimension bereits durch TISEAN angewendet wurde, ermöglicht die invariante Dichte eines ergodischen Systems eine statistische Behandlung der zugrundeliegenden deterministischen Dynamik. Bei dieser Behandlung gilt es zu beachten, dass

- statistische Aussagen nur sinnvoll sind, wenn eine ausreichende Zeitskalen-separation zwischen der schnellen chaotischen Dynamik und den betrachteten Veränderungen vorliegt.
- der zugrundeliegende Determinismus und damit die Information der schnellen chaotischen Dynamik nicht in ein statistisches Modell eingeht.

Eine statistische Modellierung der Dynamik werde ich im Kapitel 6 vorstellen. Dort werden die intermittenten Sprünge zwischen den Subattraktoren auf ein stochastisches Doppelmuldenbild abgebildet, wobei die Rauschstärke und die Form des Doppelmuldenpotentials direkt aus  $V_1$ -Zeitreihen des Shinriki-Oszillators bestimmt werden.

Um zu überprüfen, ob  $\rho(V_1)$  des Shinriki-Oszillators eine invariante Dichte ist, wurde sie für je einen Kontrollparameterwert ober- und unterhalb des kritischen Kontrollparameters  $R_c$  aus  $V_1$ -Zeitreihen bestimmt. Aus der Definition der invarianten Dichte  $\rho$  (3.8) folgt eine Unabhängigkeit vom gewählten Startzeitpunkt. Deswegen wurde die bei den zwei Kontrollparametern gemessene Zeitreihe von ca. 30000 Oszillationen in zwei gleichlange Zeitreihen geteilt und  $\rho$  aus den Zeitreihen ermittelt. Abb. 3.4 zeigt das Ergebnis dieser Messung für (a) den monoscroll-Attraktor bei  $R - R_c = -100\Omega$  und (b) den doublescroll-Attraktor bei  $R - R_c = 2.2k\Omega$ . Für beide Messungen weichen die Kurven von  $\rho(V_1)$  nur sehr wenig voneinander ab, was durch die Länge der Zeitreihen zu erwarten war. Man kann davon ausgehen, dass für eine deutlich längere Messzeit  $\rho(V_1)$  tatsächlich eine invariante Dichte ist. Für den doublescroll-Attraktor spiegelt die Symmetrie von  $\rho(V_1)$  um  $V_1 = 0$  den symmetrischen Aufbau dieses Attraktors aus zwei monoscroll-Attraktoren wieder.

---

ergodischen Systems kommt im zeitlichen Verlauf allen Punkten gleicher Energie beliebig nah, wohingegen bei ergodischen Systemen alle diese Punkte tatsächlich durchlaufen werden [27].

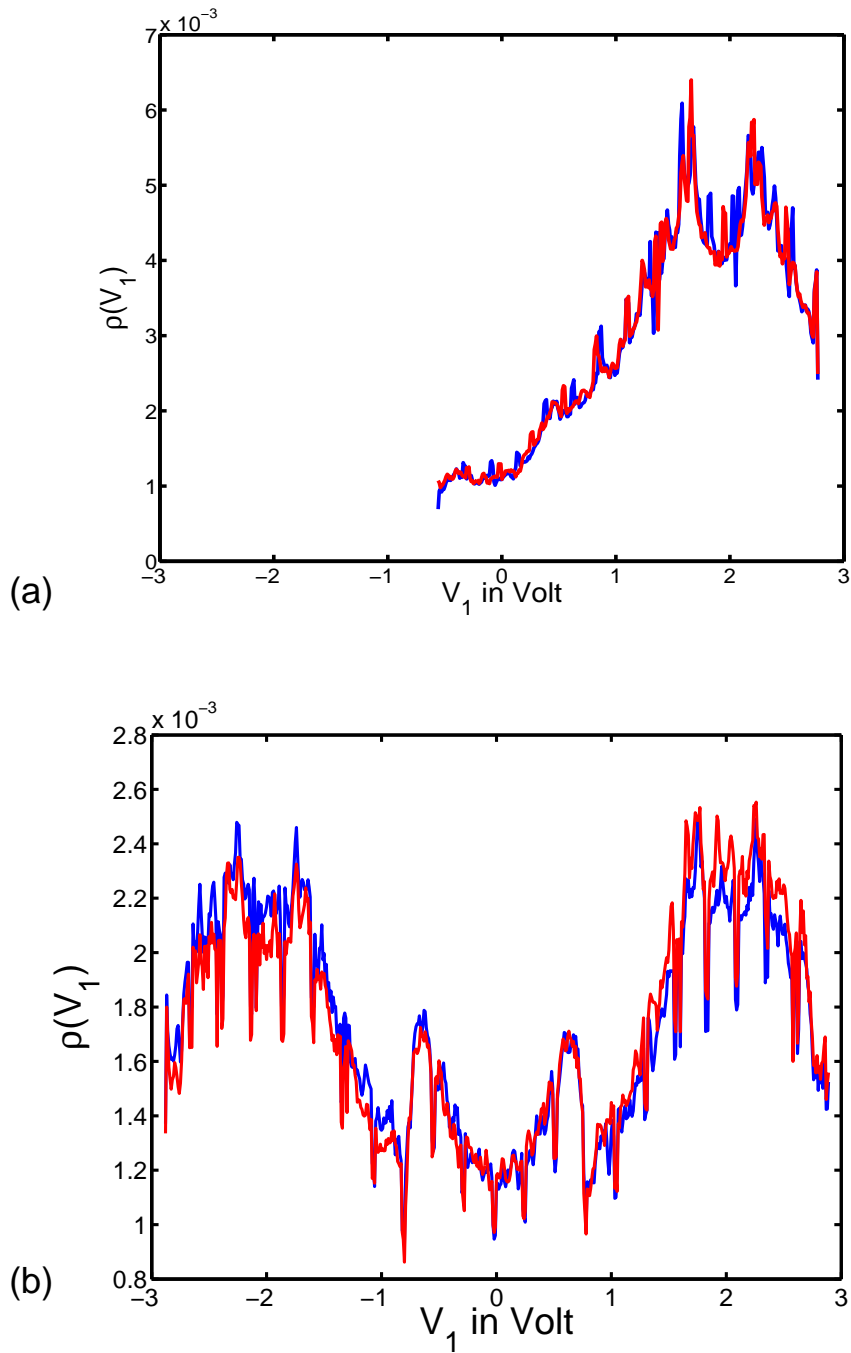


Abbildung 3.4: Invariante Dichte  $\rho(V_1)$  des Shinriki-Oszillators berechnet für zwei Realisierungen der Zeitreihe  $V_1(t)$ : (a)  $R - R_c = -100\Omega$  und (b)  $R - R_c = 2.2\text{k}\Omega$ . Die mittlere Abweichung zwischen der roten und blau dargestellten Dichte  $\rho$  ist gering. Die Dichte oberhalb von  $R - R_c > 0$  ist symmetrisch und kann in erster Näherung als Spiegelung bezüglich  $V_1 = 0$  der Dichte in (a) aufgefasst werden, vgl. Abb. 3.5.

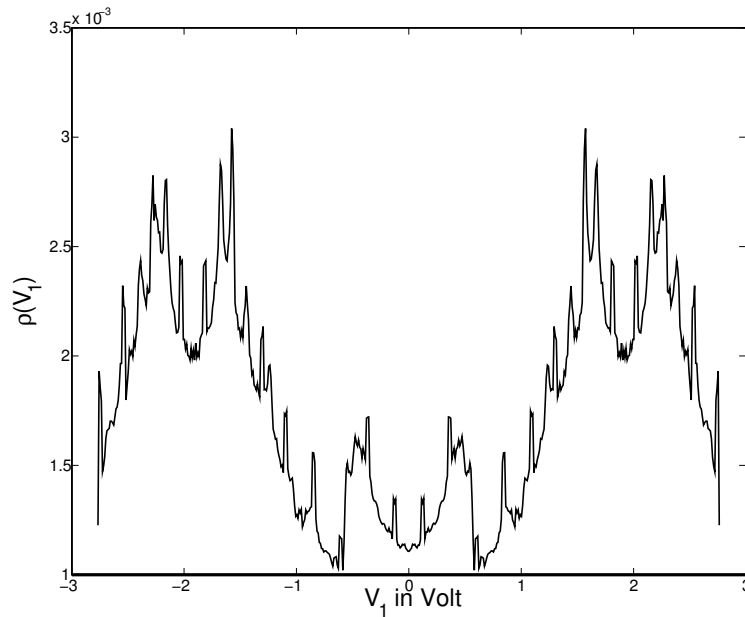


Abbildung 3.5: Invariante Dichte  $\rho(V_1)$  zweier monoscroll-Attraktoren. Durch den Überlapp der beiden Attraktoren entstehen symmetrische Maxima der Dichte zwischen 0 und 1 Volt.

Um dies zu verdeutlichen, wurde für die Abb. 3.5 die Dichte  $\rho(V_1)$  des monoscroll-Attraktors gespiegelt. Man sieht hier deutlich, dass die erhöhte Dichte zwischen 0 und 1 Volt durch das Überlappen der beiden Subattraktoren verursacht wird.

Der direkte Vergleich zwischen der invarianten Dichte im doublescroll-Bereich (Abb. 3.4) und der aus den monoscroll-Daten konstruierten invarianten Dichte eines doublescroll-Attraktors (Abb. 3.5) zeigt, dass insbesondere die Form der invarianten Dichte sich kaum ändert: Die invariante Dichte aller Zeitreihen zeigt um die instabilen Fixpunkte bei  $V_1 \approx \pm 2V$  jeweils zwei Maxima. Ebenso treten um den trivialen instabilen Fixpunkt bei  $V_1 = 0$  zwei symmetrische Maxima auf, deren Ursache der Überlapp zwischen den Subattraktoren ist. Die wesentliche Veränderung der invarianten Dichteverteilung ist ein Anwachsen des Bereiches, in dem die Verteilung von Null verschieden ist. Dieser Bereich wächst mit der Erhöhung des Kontrollparameters an, wie aus Abb. 3.6 zu ersehen ist. Dort sind die Beträge der maximalen und minimalen Amplitude der Zeitreihe  $V_1(t)$  für den Parameterbereich dargestellt. Der Anstieg der Beträge ist mit 50mV sehr gering.

Die Symmetrie der invarianten Dichte  $\rho$  des doublescroll-Attraktors lässt sich noch genauer zeigen, indem man aus den Momenten der Verteilung

$$m_n(V_1) = \langle V_1^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} V_1^n \rho(V_1) dV_1,$$

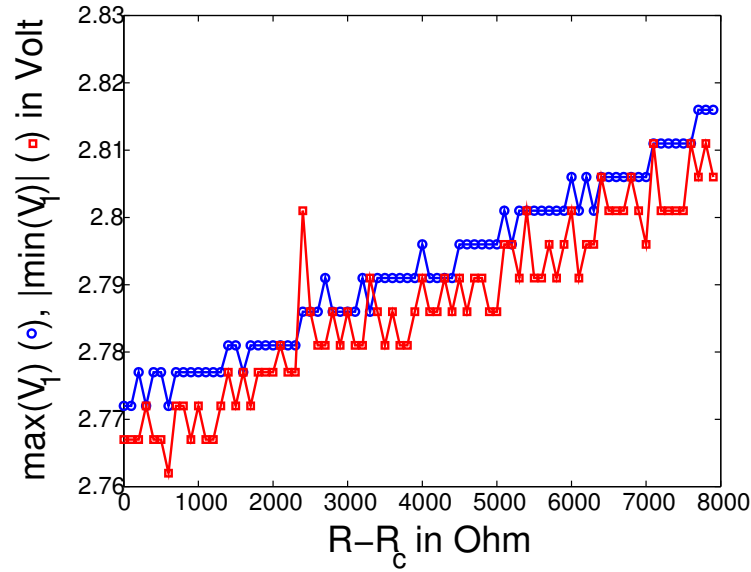


Abbildung 3.6: Betrag der Extremwerte von  $V_1(t)$  als Funktion des Kontrollparameters  $R - R_c$ : Die Extremwerte geben an, in welchem Intervall  $\rho(V_1)$  von Null verschieden ist. Die Stufen in den Spannungen zeigen die Amplitudenauflösung des Transientenrekorders.

charakteristische Kenngrößen der Verteilung berechnet. Diese sind:

$$\begin{aligned}
 \langle V_1 \rangle &= m_1 \\
 \sigma &= \sqrt{m_2 - m_1^2} \\
 \lambda_3 &= \frac{\langle (V_1 - m_1)^3 \rangle}{\sigma^3} \\
 \lambda_4 &= \frac{\langle (V_1 - m_1)^4 \rangle - 3 \cdot \langle (V_1 - m_1)^2 \rangle}{\sigma^4}
 \end{aligned}$$

Aus der Definition der Momente folgt sofort, dass die erste Gleichung den Mittelwert von  $V_1$  angibt und die folgende Gleichung die Schwankung bzw. Varianz.  $\lambda_3$  wird als Schiefheit oder *skewness* bezeichnet. Für symmetrische Verteilungen verschwindet sie.  $\lambda_4$  ist die Kurtosis. Sie gibt an, wie weit eine Verteilung von der Gauss-Verteilung abweicht.

Diese charakteristischen Kenngrößen sind in Abb. 3.7 für die invariante Dichteverteilung des Shinriki-Oszillators oberhalb von  $R_c$  gezeigt. Die Varianz  $\sigma$  und die Kurtosis  $\lambda_4$  sind über den betrachteten Kontrollparameterbereich nahezu konstant. Dies resultiert wesentlich von der Formstabilität der invarianten Dichte und dem geringen Anwachsen des Intervalls, in dem  $\rho(V_1) \neq 0$ . Wie bei einer um den Nullpunkt symmetrischen Verteilung zu erwarten, verschwinden sowohl der Mittelwert von  $V_1$  als auch die Schiefheit  $\lambda_3$  über einen weiten Parameterbereich. Oberhalb von



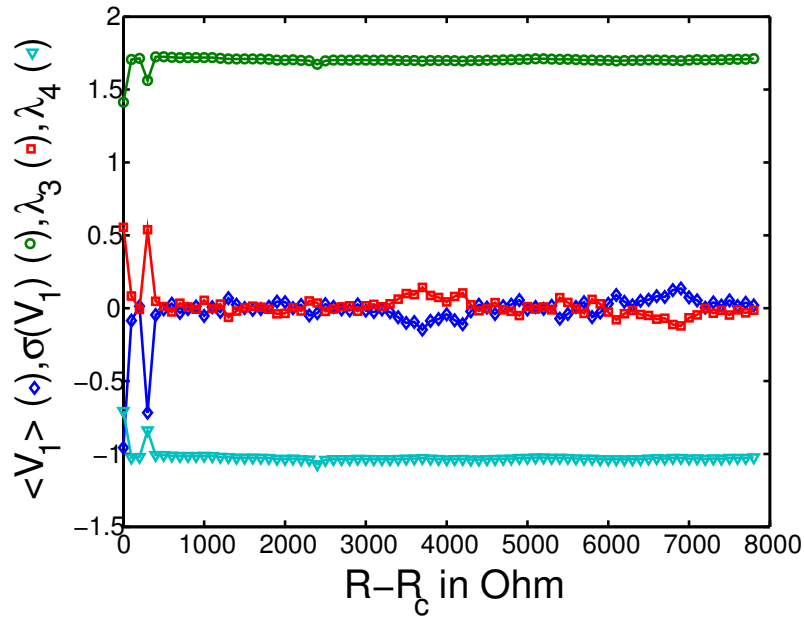


Abbildung 3.7: Mittelwert  $\langle V_1 \rangle$ , Schwankung  $\sigma$ , Schiefeit  $\lambda_3$  und Kurtosis  $\lambda_4$  der invarianten Dichte  $\rho(V_1)$  des doublescroll-Attraktors in Abhängigkeit vom Kontrollparameter  $R - R_c$ .

$R - R_c = 3.2\text{k}\Omega$  weichen Mittelwert und Schiefeit etwas von Null ab. Diese Abweichungen können – im Gegensatz zu den großen Abweichungen nahe  $R - R_c \approx 0$  – nicht mit zu wenig Sprüngen zwischen den Subattraktoren erklärt werden, sondern deuten auf eine tatsächliche Asymmetrie des doublescroll-Attraktors hin.

Um diese Asymmetrie genauer zu quantifizieren, wurde eine Poincaré-Abbildung des dreidimensional eingebetteten Attraktors mit Hilfe von TISEAN erzeugt. Die Poincaré-Ebene, deren Schnittpunkte mit dem Attraktor die Abbildung ergeben, erfüllte die Bedingung  $V_1(t + 2 \cdot \tau_d) = V_1(t + 3 \cdot \tau_d) = 0$ . Durch die doublescroll-Topologie des Attraktors sollten bei dieser Abbildung sowohl die Durchstoßpunkte in positiver wie auch negativer Richtung ausgewertet werden, um die unterschiedliche Umlaufrichtung der Trajektorie auf den Subattraktoren auszugleichen. Trägt man den aktuellen Durchstoßpunkt  $x_i$  gegen den nächsten  $x_{i+1}$  auf, so erhält man eine Darstellung der eindimensionalen Iterationsabbildung  $x_n \rightarrow x_{n+1}$ . Abb. 3.8 zeigt zwei Iterationsabbildungen bei unterschiedlichen Kontrollparameterwerten: Abb. 3.8(a) wurde bei  $R - R_c = 2.2\text{k}\Omega$  erzeugt, bei dem das System symmetrisch ist und Abb. 3.8(b) bei  $3.4\text{k}\Omega$ , einem Wert, bei dem Abb. 3.7 eine Asymmetrie erwarten lässt. Im direkten Vergleich der beiden Iterationsabbildungen fällt auf, dass (a) völlig symmetrisch ist, wohingegen in (b) die extremalen  $x_n$ -Werte stärker zu negativen Werten verschoben sind. Dieses Bild der Dynamik des Shinriki-Oszillators bestätigt die beobachtete Abweichung des Mittelwerts  $\langle V_1 \rangle$  zu negativen Werten hin.

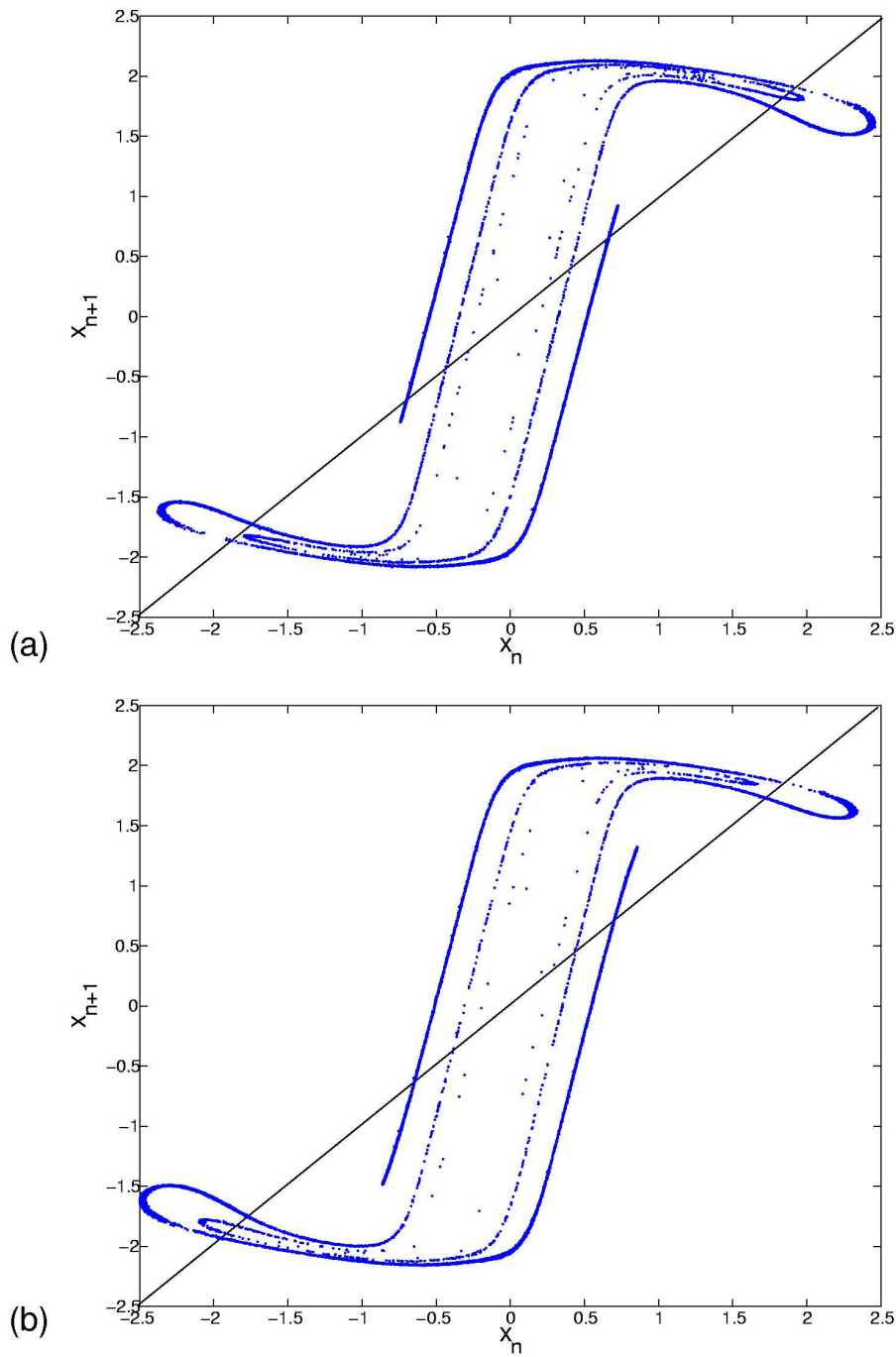


Abbildung 3.8: Poincaré Abbildung des Shinriki-Oszillators für (a)  $R - R_c = 2.2\text{k}\Omega$  ( $\langle V_1 \rangle \approx \lambda_3 \approx 0$ ) und (b)  $R - R_c = 3.4\text{k}\Omega$  ( $\langle |V_1| \rangle \approx \lambda_3 \neq 0$ ). Die Asymmetrie des doublescroll-Attraktors für Kontrollparameterwerte wie in (b) führt zu einer asymmetrischen Abbildung.

Eine weitere Möglichkeit, die Dynamik des Shinriki-Oszillators als Iterationsabbildung darzustellen, ist, die aufeinander folgenden Extremwerte der  $V_1$ -Amplitude gegeneinander aufzutragen. Für  $R - R_c = 2.2k\Omega$  ist diese Abbildung in Abb. 3.9(a) dargestellt. In rot sind die Minima der Amplitude und in blau die Maxima aufgetragen. Weil zu den entsprechenden Maximalwerten die zugehörigen Minimalwerte mitaufgetragen wurden, kann Abb. 3.9(a) als zwei getrennte Abbildungen verstanden werden: Die eine zeigt die Entwicklung der Werte auf der Seite des Überlapps zwischen den Subattraktoren (um  $x_n = x_{n+1} = 0$ ), wohingegen die zweite die Entwicklung auf der abgewandten Seite beschreibt. Die Zusammensetzung aus den zwei Abbildungen kann man anhand von Abb. 3.9(b) verstehen: Betrachtet man den grün gekennzeichneten Abschnitt, so liegen die Maxima dieses Bereichs in der Iterationsabbildung, der ebenfalls mit a gekennzeichnet wurde. Die zugehörigen Minima dagegen liegen auf dem Abbildungsteil b. Wie bei der Abbildung durch einen Poincaré-Schnitt (Abb. 3.8) sind die resultierenden Abbildungen mehrdeutig und die Anzahl der Schnittpunkte zwischen der Winkelhalbierenden  $y = x$  und der Abbildung, die Fixpunkte der Abbildung aufzeigt, sind deutlich häufiger als die Anzahl von drei Fixpunkten des Shinriki-Oszillators. Zwar minimiert die Abbildung der Extremwerte die Mehrdeutigkeit für  $x_n$  im wesentlichen auf den Bereich des Überlapps zwischen den Attraktoren, jedoch führt in beiden Fällen der Überlapp zwischen den Subattraktoren zu einer nicht optimalen Abbildung der Dynamik auf eine eindimensionale Iterationsabbildung.

Interessant ist es, die Abfolge der Iterationswerte in der Extremwertabbildung zu verfolgen. Beschränkt man sich auf die Dynamik von a und a', so kann der Sprungprozess zwischen den beiden Subattraktoren genauer analysiert werden. Ein Sprung zwischen den beiden Teilen des abgebildeten doublescroll-Attraktors geht immer über einen der beiden nahezu senkrechten Abbildungsteile, die in der Graphik mit A bzw. A' bezeichnet sind. Wird einer dieser Bereiche erreicht, so ist der Wert im nächsten Iterationsschritt in einem der Bereiche, die mit B bzw. B' bezeichnet sind. In der Zeitreihe sind die entsprechenden Oszillationen rot eingekreist. Nach einem Sprung ist die Dynamik wieder in einem der Bereiche a bzw. a'. Die Gesamtdynamik dieser Abbildung kann als symbolische Dynamik dargestellt werden:

$$\dots \rightarrow a \rightarrow \dots \rightarrow a \rightarrow A' \rightarrow B \rightarrow a' \rightarrow \dots \rightarrow a' \rightarrow A \rightarrow B' \rightarrow a \rightarrow \dots$$

Die Entwicklung der Abbildung als Funktion des Kontrollparameters  $R$  ist vergleichbar mit der in Abb. 3.8. Die Extremwertabbildung zeigt ebenso eine Verschiebung für diejenigen Kontrollparameterwerte, bei denen  $\langle V_1 \rangle$  nicht verschwindet. Des weiteren ändern sich der Abbildungsteil a und a' wenig bei Kontrollparametervariation. Wie bei der Poincaré-Abbildung zeigt sich eine Veränderung hauptsächlich in den mittleren Bereichen b und b', bei denen die Abbildung bei Kontrollparameter-Erhöhung breiter wird und die beiden symmetrischen Teilabschnitte zu höheren Beträgen von  $x_{n+1}$  anwachsen.

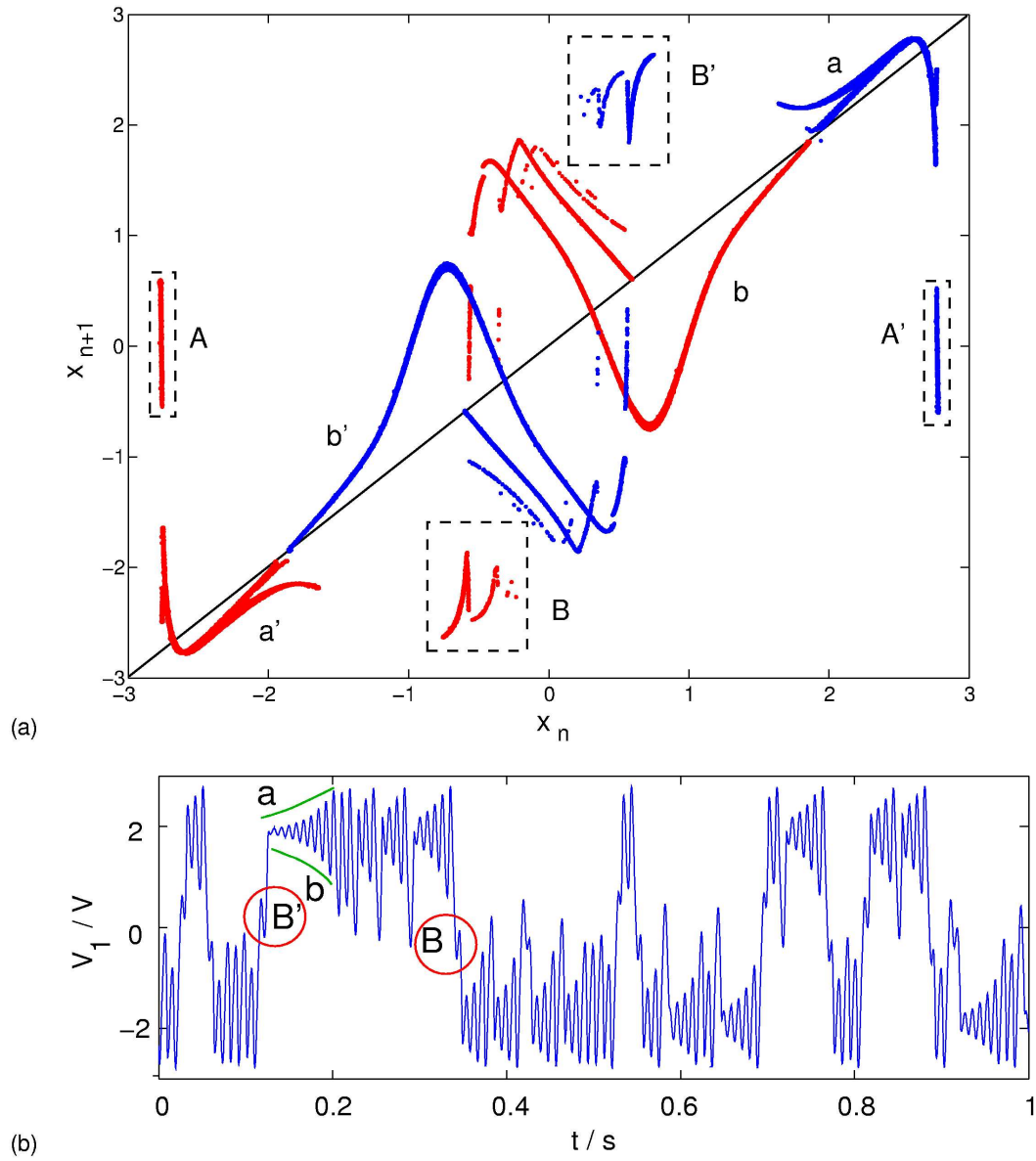


Abbildung 3.9: (a) Abbildung der Dynamik des Shinriki-Oszillators durch das Auftragen der Extremwerte der  $V_1$ -Amplituden bei  $R - R_c = 2.2\text{k}\Omega$  und (b) ein Ausschnitt der Zeitreihe  $V_1(t)$ .

## 3.2 Kriseninduzierte Intermittenz

Die bisherige statistische Beschreibung ermöglicht quantitative Aussagen über chaotische Systeme im Allgemeinen. Mit dem Phänomen der Intermittenz ist ein Typ der Dynamik verbunden, der nur die statistische Beschreibung zulässt, selbst wenn die Messfrequenz deutlich über der Oszillationsfrequenz des Systems liegt. Bei Intermittenz wird eine Hauptdynamik des Systems zeitweilig unterbrochen. Die Hauptdynamik ist durch das Verhalten vor dem Auftreten der Intermittenz gegeben. Abhängig von der Art der Hauptdynamik und dem speziellen Entstehen der Intermittenz kann man diese in verschiedene Klassen unterteilen:

- Eine periodische Schwingung wird zeitweilig durch chaotische Ausbrüche (engl. *bursts*) unterbrochen. Dieses Verhalten wird als **Pomeau-Manneville-Intermittenz** [24] bezeichnet und stellt neben der Periodenverdopplungskaskade und der Quasiperiodizität einen möglichen Weg zu chaotischem Verhalten dar.
- Ein chaotisches Verhalten wird von einem anderen chaotischen Verhalten unterbrochen. Diese **Chaos-Chaos-Intermittenz** tritt als kriseninduzierte [28, 29] oder auch als On-Off Intermittenz [30] in dynamischen Systemen auf.

Gemeinsame Eigenschaft dieser Intermittenzformen ist, dass die Unterbrechung der Hauptdynamik ab einem bestimmten kritischen Kontrollparameter  $p_c$  geschieht. Wird der Kontrollparameter oberhalb dieser Schwelle weiter erhöht, nimmt die Häufigkeit der Sprünge zwischen den verschiedenen dynamischen Zuständen zu. Das Auftreten der Unterbrechungen ist dabei zufällig und kann folglich statistisch beschrieben werden. Für die Häufigkeitsverteilung der verschiedenen Zustände und für die mittlere Verweildauer in ihnen können bestimmte Skalengesetze hergeleitet werden, die ein Unterscheidungsmerkmal für die Unterklassen darstellen.

Im Folgenden werde ich genauer auf die kriseninduzierte Intermittenz eingehen, die im Shinriki-Oszillator oberhalb von  $R_c$  auftritt. Dabei werde ich zwei Schwerpunkte setzen:

- Ursache der Intermittenz und
- charakteristische Merkmale / statistische Eigenschaften der Intermittenz.

### 3.2.1 Verschmelzkrise

Wie bereits bei der Beschreibung des Shinriki-Oszillators erwähnt, ist eine plötzliche Attraktorvolumenänderung resultierend aus einer kleinen Variation des Kontrollparameters typisch für jede Krise. Das Auftreten von Krisen ist in vielen chaotischen Systemen belegt. Beispiele von Krisen umfassen Ringlaser [31], das entsprechende Modell-System die Ikeda-Map [32], getriebene Yttrium-Eisen-Granat Kugeln [33], eine Vielzahl von Schwingkreisen [16, 34] und Mikrowellenresonatoren [35]. Im Allgemeinen unterscheidet man drei Arten von Krisen:

- **Attraktor-Zerstörung:** Beim kritischen Kontrollparameter  $p_c$  wird der vormalig stabile Attraktor durch die Kollision mit einem instabilen Attraktor zerstört. Typisch für diese Krise ist das Auftreten von chaotischen Transienten: Das System bleibt eine gewisse Zeit in der Nähe des instabilen Attraktors, um dann zu einem anderen stabilen Attraktor im Phasenraum zu entfliehen. In der Zeit, die die Trajektorie in der Nähe des instabilen Attraktors verbringt, hat die Dynamik Ähnlichkeit mit der Dynamik vor der Krise.
- **Innere Krise:** Bei einer inneren oder homoklinen Krise kollidiert bei  $p_c$  eine stabile Mannigfaltigkeit eines Orbits mit dessen instabiler. Da sowohl die stabile als auch die instabile Mannigfaltigkeit zum selben Objekt im Phasenraum gehört, spricht man von einer inneren oder homoklinen Krise. Für Kontrollparameterwerte oberhalb des kritischen Werts beobachtet man ein intermittentes Springen zwischen dem Anfangsattraktor und dem plötzlich neu erschlossenen Phasenraumvolumen. Das Springen zeigt sich in der Zeitreihe durch chaotische Ausbrüche. Nach diesen Bursts kehrt die Trajektorie auf den ursprünglichen Attraktor zurück und es wird eine ähnliche Dynamik beobachtet, wie vor der Krise.
- **Verschmelzkrise:** Die Verschmelzkrise ist eine heterokline Krise. D.h. mindestens zwei verschiedene Attraktoren sind an ihr beteiligt. Bei dem kritischen Kontrollparameter  $p_c$  kollidieren diese Attraktoren simultan mit dem Einzugsgebiet der anderen. Im Phasenraum entsteht ein neuer Attraktor, welcher durch die Verschmelzung der vormalig getrennten Attraktoren gebildet wird. Fortan beobachtet man eine Chaos-Chaos Intermittenz, bei der die Trajektorie statistisch zwischen den Subattraktoren springt. Diese Form der Krise tritt meistens in Systemen mit hoher Symmetrie auf und ist typisch für die Dynamik des Shinriki-Oszillators oberhalb von  $R_c$ .

Das charakteristische Merkmal der kriseninduzierten Intermittenz ist eine mittlere Verweildauer  $\langle \tau \rangle$ , die die Trajektorie in der Nähe des subkritischen Attraktors verbringt, bevor sie im Falle der Attraktor-Zerstörung entflieht, bzw. bei der inneren und der Verschmelzkrise eine intermittente Unterbrechung der Dynamik zeigt. Die mittlere Verweilzeit  $\langle \tau \rangle$  folgt einem Skalierungsgesetz, welches nur vom „Abstand“ vom kritischen Wert abhängt:

$$\langle \tau \rangle \sim (p - p_c)^{-\gamma}. \quad (3.11)$$

Der Exponent  $\gamma$  in diesem Skalierungsgesetz ist konstant und hängt allein von den topologischen Eigenschaften der Objekte im Phasenraum ab, die miteinander kollidieren. Im folgenden werden kurz die geometrischen Ideen vorgestellt, die von Grebogi, Ott und Yorke 1982 [28] dazu benutzt wurden, den Exponenten  $\gamma$  für zweidimensionale Abbildungen direkt aus den Lyapunov-Exponenten herzuleiten. Sie betrachteten hierzu einen instabilen periodischen Orbit  $Q$  mit der zugehörigen stabilen Mannigfaltigkeit  $W^S$  und der instabilen  $W^U$  (vgl. den Poincaré-Schnitt in

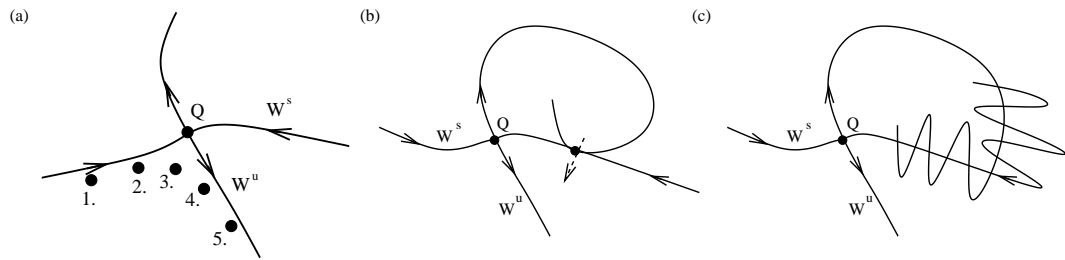


Abbildung 3.10: Poincaré Schnitt eines periodischen Orbits mit einer homoklinen Krise: (a) Instabiler Orbit  $Q$  mit stabiler und instabiler Mannigfaltigkeit  $W^S$  bzw.  $W^U$ . Dargestellt ist die Annäherung einer Trajektorie an den instabilen Orbit entlang  $W^S$  (Punkte 1-3) und das Fortlaufen vom Orbit entlang  $W^U$  (Punkte 4 und 5). (b) Beim kritischen Kontrollparameter  $p_c$  berühren sich die stabile und instabile Mannigfaltigkeit. Bei weiterem Erhöhen des Kontrollparameters wird die instabile Mannigfaltigkeit über die stabile geschoben (gestrichelter Pfeil). (c) Homokliner Orbit als Resultat einer inneren Krise. Der homokline Orbit entsteht durch einen transversalen Schnitt zwischen der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeit. Darstellung entnommen aus [36].

Abb. 3.10(a)). Topologisch gesehen handelt es sich bei diesem Schnittpunkt des instabilen Orbits um einen Sattelpunkt, d.h. entlang der stabilen Mannigfaltigkeit  $W^S$  laufen alle benachbarten Trajektorien auf ihn zu – der lokale Lyapunov-Exponent ist negativ – wohingegen alle Trajektorien in der Nachbarschaft sich von ihm entlang der instabilen Mannigfaltigkeit  $W^U$  exponentiell entfernen, was einem positiven Lyapunov-Exponenten entspricht. Dieses Verhalten ist nochmals in Abb. 3.10(a) dargestellt: Startet die Trajektorie in der Nähe der von  $W^S$  (Punkt 1), so nähert sie sich zunächst dem instabilen Orbit  $Q$  an (die Punkte 2 und 3). Zwangsläufig kommt sie dabei aber in die Nähe der instabilen Mannigfaltigkeit  $W^U$  und entfernt sich von  $Q$  (Punkte 3-5).

Die Situation bei einer homoklinen Krise ist in der Abb. 3.10(b) und (c) skizziert. Beim kritischen Kontrollparameter  $p_c$  berühren sich die stabile und instabile Mannigfaltigkeit. Eine weitere Erhöhung des Kontrollparameters führt zu einem transversalen Schnitt zwischen den Mannigfaltigkeiten. Dabei hängt die Größe dieser Überschneidung vom Abstand des Kontrollparameters vom kritischen Wert ab  $p - p_c$ . Das Skalierungsgesetz (3.11) kann in diesem geometrischen Bild wie folgt interpretiert werden: Die Größe der Überschneidung bestimmt die Wahrscheinlichkeit für einen Übergang, wohingegen der systemabhängige Exponent  $\gamma$  durch die Lyapunov-Exponenten bestimmt wird, die mit den stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten verknüpft sind.

Die vorgestellten geometrischen Überlegungen gelten allerdings nur dann, wenn sich die Stabilität des instabilen Orbits  $Q$  nicht sprunghaft ändert und somit der Attraktor hyperbolisch oder zumindest quasihyperbolisch ist. Tritt z. B. eine Bifur-

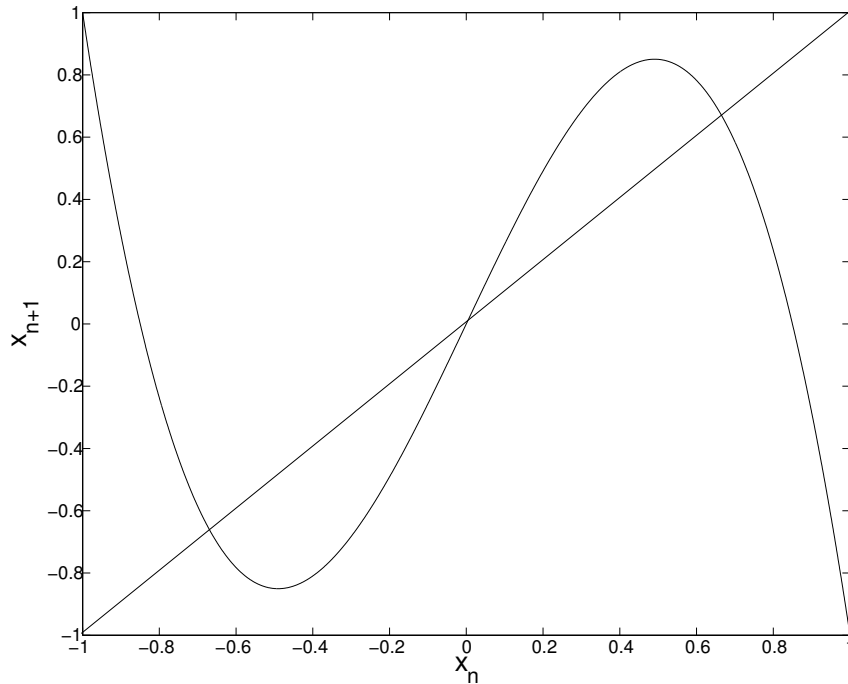


Abbildung 3.11: Darstellung der kubischen Abbildung (3.12) für einen Kontrollparameter von  $a = 3.6$ .

kation im Attraktor auf, durch die ein stabiler periodischer Orbit generiert wird, so kann das resultierende Skalenverhalten von (3.11) abweichen.

Ein numerisches Beispiel für kriseninduzierte Intermittenz bietet die eindimensionale kubische Abbildung:

$$x_{n+1} = (a - 1)x_n - ax_n^3, \quad (3.12)$$

die bei einem Kontrollparameterwert von  $a = a_c = \frac{3}{2}\sqrt{3} + 1$  eine Verschmelzkrise hat. Diese eindimensionale Abbildung ist besonders interessant, weil sie wie das Shinriki-System drei Fixpunkte besitzt. Betrachtet man die graphische Darstellung in Abb. 3.11, fällt eine gewisse Ähnlichkeit mit der Poincaré- und der Extremwertabbildung auf (vgl. Abb. 3.8 und 3.9).

Unterhalb von  $a_c$  existieren zwei getrennte chaotische Attraktoren bei positiven und negativen Werten von  $x_n$ . Die Werte von  $x_n$  sind auf beiden Attraktoren begrenzt, so dass  $0 < |x_n| < 1$ . Diese Trennung der beiden Attraktoren beim Wert  $x = 0$  ist in den Häufigkeitsverteilungen der  $x_n$ -Werte in Abb. 3.12 (a) deutlich sichtbar. Die Häufigkeitsverteilungen wurden aus einer Iterationsreihe für  $a = 3.596$  erzeugt, wobei die zwei Startwerte  $x_0$  so gewählt wurden, dass die Dynamik jeweils auf einem der beiden Attraktoren stattfindet. Bei der Verschmelzkrise kollidieren diese Attraktoren simultan mit dem instabilen Fixpunkt bei  $x = 0$ , und der durch die Verschmelzung entstandene Attraktor existiert im ganzen Intervall



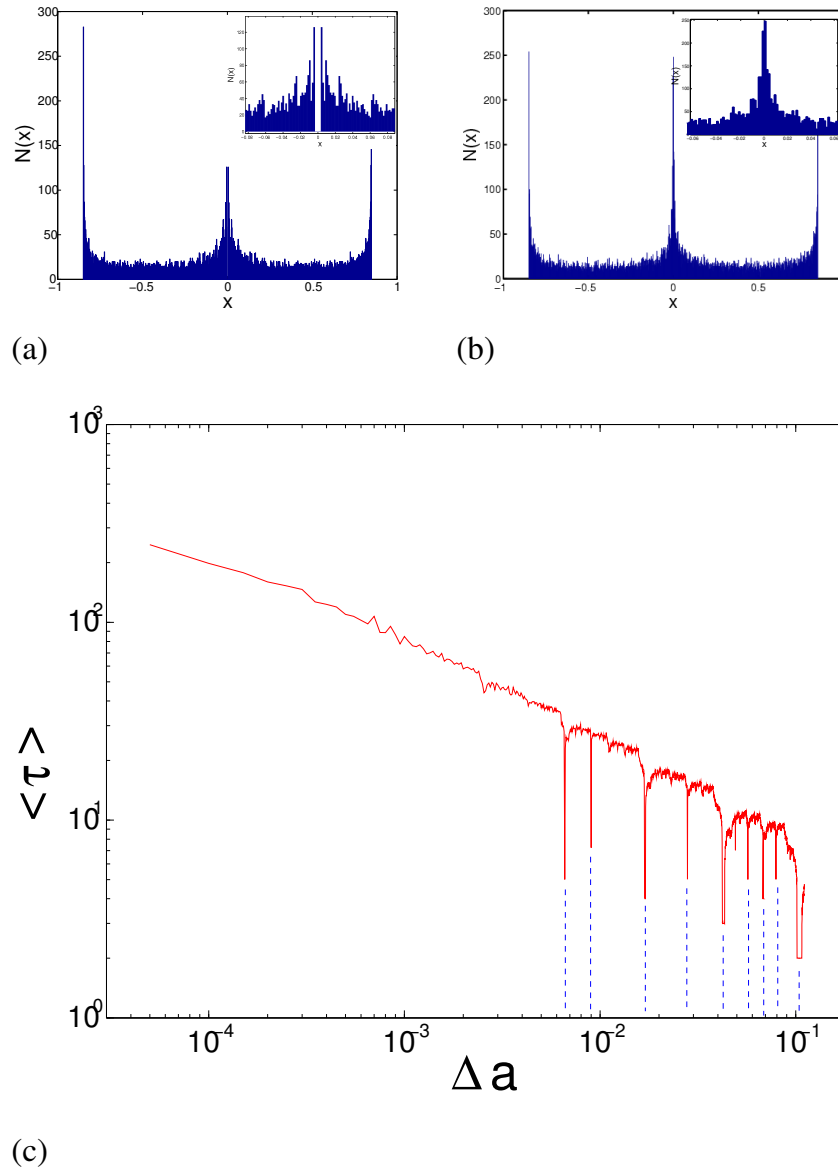


Abbildung 3.12: Häufigkeitsverteilung der kubischen Abbildung und mittlere Verweildauer  $\langle \tau \rangle$  nach der Verschmelzkrise: (a) Häufigkeitsverteilungen des Attraktors bei positiven und negativen  $x$ -Werten für einen Kontrollparameterwert von  $a = 3.596 < a_c$ . In der Vergrößerung des Parameterbereiches um  $x = 0$  ist deutlich die Trennung der beiden Attraktoren erkennbar. (b) Häufigkeitsverteilung für die kubische Abbildung nach der Krise ( $a = 3.599 > a_c$ ). Der verschmolzene Attraktor zeigt  $x$ -Werte im ganzen Intervall, wie in der Vergrößerung ersichtlich ist auch die Lücke um  $x = 0$  verschwunden. (c) Mittlere Verweildauer  $\langle \tau \rangle$  als Funktion von  $\Delta a = a - a_c$  in doppeltlogarithmischer Auftragung. Eine Vielzahl von schmalen periodischen Fenstern sind am plötzlichen Einbrechen von  $\langle \tau \rangle$  erkennbar. Oberhalb des fünften Fensters ist das Skalierungsgesetz (3.11) nicht mehr erfüllt. Unterhalb ergibt sich ein Skalierungsexponent von  $\gamma = 0.5$ .

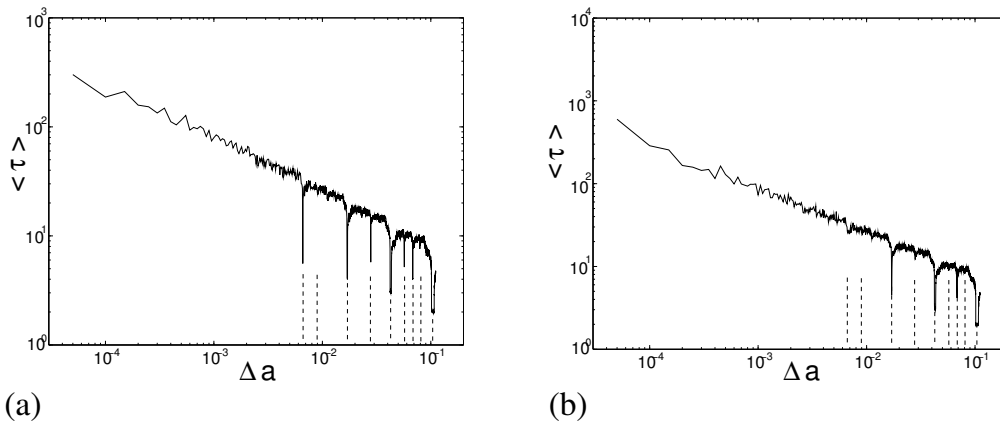


Abbildung 3.13: Der Verlauf von  $\langle \tau \rangle$  in Abhängigkeit von  $\Delta a$  bei zusätzlich eingekoppeltem weißen Gauß'schen Rauschen. Die gestrichelten Linien bezeichnen die Positionen, an denen im rauschfreien Fall periodische Fenster gefunden wurden. (a) Varianz  $10^{-6}$ : Die periodischen Fenster bei  $\Delta a = 9 \cdot 10^{-3}$  und  $\Delta a = 9 \cdot 10^{-2}$  treten nicht mehr auf. (b) Varianz  $10^{-5}$ : Von den ursprünglich neun periodischen Fenstern der rauschfreien Abbildung sind bei dieser Rauschstärke nur noch vier Fenster stabil.

zwischen  $[-1, 1]$  (vgl. Häufigkeitsverteilung für  $a = 3.599 > a_c$  in Abb. 3.12 (b)). Aufgrund dieser einfachen Zuordnung – positive Werte von  $x_n$  gehören zum einen Subattraktor, negative Werte zum anderen – lässt sich die mittlere Verweildauer  $\langle \tau \rangle$  (3.11) recht einfach auswerten. In Abb. 3.12 (c) ist  $\langle \tau \rangle$  als Funktion von  $\Delta a \equiv a - a_c$  dargestellt. Das Skalierungsgesetz (3.11) ist in dieser doppelt-logarithmischen Auftragung deutlich zu erkennen und der kritische Exponent  $\gamma$  ergibt sich zu 0.5 [37]. Darüberhinaus sind in der Graphik einige blau gekennzeichnete periodische Fenster durch einen drastischen Abfall von  $\langle \tau \rangle$  erkennbar. Betrachtet man den Verlauf von  $\langle \tau \rangle$  insbesondere um das dritte und fünfte periodische Fenster herum, so erkennt man ein Abweichen vom Skalierungsgesetz. Diese Abweichung stellt, wie bereits oben erwähnt, nicht das Skalierungsgesetz in Frage. Das Skalierungsgesetz setzt eine Attraktor-Topologie voraus, die sich im Skalierungsbereich nur wenig ändert. Die angesprochenen Abweichungen sind somit ein Indiz für eine deutliche Änderung der Topologie des Attraktors vor und nach den Bifurkationen, welche die periodischen Fenster verursachen.

Die große Mehrheit der periodischen Fenster der kubischen Abbildung nach der Verschmelzkrise sind nur über einen sehr schmalen Kontrollparameterbereich beobachtbar. Bei realen Experimenten sind diese bereits bei schwachem intrinsischen Rauschen nicht mehr zu beobachten. Um das zu demonstrieren, wurde in die Abbildung ein zusätzlicher stochastischer Antrieb additiv eingekoppelt. Bei der stochastischen Komponente handelt es sich um numerisch erzeugtes, Gauß'sches weißes Rauschen [12] mit einer Varianz von  $10^{-6}$  bzw.  $10^{-5}$ . Betrachtet man den Verlauf

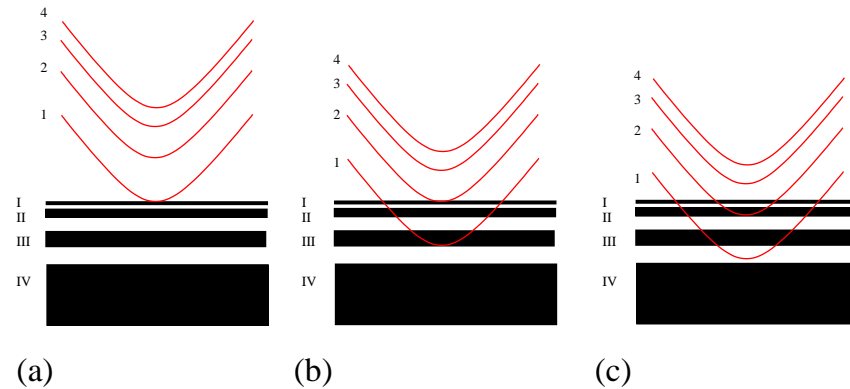


Abbildung 3.14: Graphische Darstellung der Verschmelzkrise in einer zweidimensionalen Abbildung nach [38, 39]. Rot dargestellt eine Parabelschar, die den Attraktor in der Nähe der Kollision beschreibt; schwarz dargestellt das Einzugsgebiet des anderen Attraktors. (a)  $p = p_c$ : Der äußerste Kurve des Attraktors (1) berührt die Grenze des Einzugsgebietes (I). (b)  $p_1 > p_c$ : Der Überlapp zwischen dem Subattraktor und dem Pseudo-Einzugsgebiet wird größer. Der Überlapp zwischen der Kurve (1) und dem Streifen (III) ist maximal. (c)  $p_2 > p_1 > p_c$ : Der Subattraktor schiebt sich weiter in das Pseudo-Einzugsgebiet. Der Überlapp zwischen der Kurve (1) und dem Streifen (III) ist jedoch kleiner als noch in (b).

von  $\langle \tau \rangle$  in Abhängigkeit von  $\Delta a$  (Abb. 3.13), so sieht man bei der niedrigen Varianz zwei periodische Fenster weniger als im Verlauf ohne intrinsisches Rauschen. Für den kritischen Exponenten  $\gamma$  ergibt sich weiterhin 0.5. Für die höhere Rauschintensität findet man anstelle der neun Fenster der rauschfreien Simulation nur noch vier. Betrachten wir nochmals Abb. 3.12(c) und hier insbesondere den Bereich, in dem das Skalierungsgesetz erfüllt ist, so wird ein weiteres typisches Merkmal des  $\langle \tau \rangle$  Verlaufs deutlich: Sieht man von den periodischen Fenstern ab, so erkennt man eine Feinstruktur, die dem Mittelwert der Verweildauer überlagert ist. In der doppelt-logarithmischen Darstellung ist das Muster der Feinstruktur äquidistant und erscheint als kleine Oszillationen um den Mittelwert von  $\langle \tau \rangle$ .

Obgleich diese Oszillationen bereits in den ersten Simulationen kriseninduzierter Intermittenz erkannt wurden, konnten Ursache und Stärke der Oszillation erst kürzlich von Kacperski et al. [38, 39] erklärt werden. Sie verfeinerten das vorgestellte geometrische Modell, indem sie berücksichtigten, dass die bei der Krise kollidierenden Objekte im Phasenraum eine komplexe Geometrie besitzen. Für den Fall einer Verschmelzkrise ist diese Situation in Abb. 3.14 skizziert. Der eine Attraktor (rot) wird in diesem Modell in der Nähe der Kollision als Parabelstreifen sehr geringer Breite genähert, das Einzugsgebiet des anderen Attraktors (schwarz) als Schar von Streifen. Abb. 3.14(a) zeigt den Punkt der Krise: Der eine Attraktor berührt das Einzugsgebiet des anderen Attraktors und verliert dabei seine Stabilität. Der vormals stabile Attraktor wird zu einem Sattel des neuen Attraktors im Phasenraum.

Auch das Einzugsgebiet, mit dem er kollidiert, kann eigentlich nicht mehr getrennt vom neuen Attraktor im Phasenraum behandelt werden. Trotzdem zeigen numerische Simulationen, dass die Strukturen sich bei der Kollision und in einem weiten Bereich oberhalb von  $p_c$  nicht dramatisch ändern, so dass die topologische Struktur des chaotischen Sattels als identisch mit der des vormals stabilen Attraktors angenommen werden kann. Ebenso verhält es sich mit dem Pseudo-Einzugsgebiet nach der Krise. In Abb. 3.15, die mir freundlicherweise von K. Kacperski zur Verfügung gestellt wurde, erkennt man deutlich die Stabilität der topologischen Eigenschaften des Attraktors (Parabelschar) und des Einzugsgebiets (Streifen). Diese Abbildung wurde durch die numerische Untersuchung der *kicked-spin-map* [40] für drei Kontrollparameterwerte oberhalb von  $p_c$  erzeugt. Für größere Kontrollparameter schiebt sich der Subattraktor immer weiter über das Pseudo-Einzugsgebiet und es entsteht ein Überlapp.

In den zweidimensionalen Abbildungen ist die Übergangsrate vom einen subkritischen Attraktor auf den anderen direkt proportional zum Überlappingsgebiet. Das ist einfach zu verstehen: In einer Abbildung werden alle Punkte auf dem Attraktor iterativ angesprungen, und daher bildet das Verhältnis zwischen dem Überlapp und der konstanten Fläche des Subattraktors ein direktes Maß für die Übergangswahrscheinlichkeit.

Wie man in der schematischen Abb. 3.14(b) sieht, wird dieser Überlapp gelegentlich lokal maximal. So ist der Überlapp zwischen dem Subattraktorabschnitt (1) und dem Teil des Pseudo-Einzugsgebiets (III) für genau diesen Kontrollparameter optimal. Ein weiteres Erhöhen des Kontrollparameters führt dazu, dass der Überlapp zunächst abnimmt. Natürlich ist der globale Trend ein Anwachsen des Überlapps, weil bei Kontrollparametererhöhung weitere Teile des Subattraktors (die Parabeln (2) bis (4)) mit dem Pseudo-Einzugsgebiet kollidieren und die sich Parabel (1) über den Teil (IV) schiebt. Dennoch kommt es lokal immer wieder zu einer Maximierung des Überlapps, der bei weiterer Erhöhung des Kontrollparameters kleiner wird. Dieses geometrische Modell nutzten Kacperski et al., um den Überlapp direkt aus der Schnittmenge zweier Objekte im Phasenraum – dem fraktalen Attraktor und dem Einzugsgebiet – zu berechnen [38, 39]. Mit diesen Berechnungen gelang es ihnen, nicht nur die Länge der Oszillationen sondern auch die Amplituden abzuschätzen. Darüber hinaus ergibt sich aus dem geometrischen Überlapp ebenfalls das mittlere Skalierungsverhalten (3.11).

### 3.2.2 Rauschinduzierte Krise

Unterhalb des kritischen Kontrollparameterwerts  $p_c$  tritt in rein deterministischen Systemen kein Springen zwischen den Attraktoren auf. Fügt man jedoch zu einem System mit  $p < p_c$  einen stochastischen Antrieb hinzu, so kann das System zwischen den Zuständen – je nach angelegter Rauschintensität – hin und her springen. Der Grund hierfür ist, dass der stochastische Term  $\sqrt{D}\xi(t)$  in der Bewegungsgleichung des dynamischen Systems:  $\dot{x} = f(x) + \sqrt{D}\xi$  temporär einen Überlapp zwi-

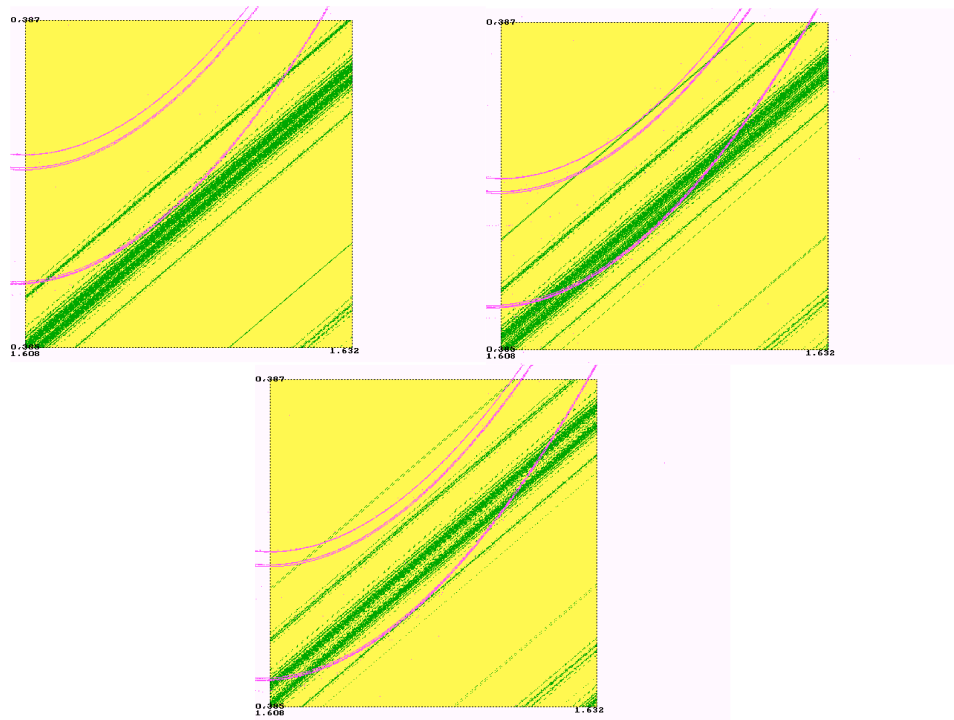


Abbildung 3.15: Darstellung der Krise an der kicked-spin-map: Numerische Untersuchung von Kacperski, welche die Stabilität der topologischen Struktur von Einzugsgebiet und Attraktor in der Umgebung vom kritischen Kontrollparameter bestätigen. Dargestellt sind drei Werte von  $p > p_c$  (ansteigend von oben links nach unten). Es ist deutlich zu sehen, wie der Subattraktor (die drei Kurven oben links) beim Erhöhen von  $p$  tiefer in das Pseudo-Einzugsgebiet eindringt, was zu einem größeren Überlapp zwischen den beiden Strukturen führt.

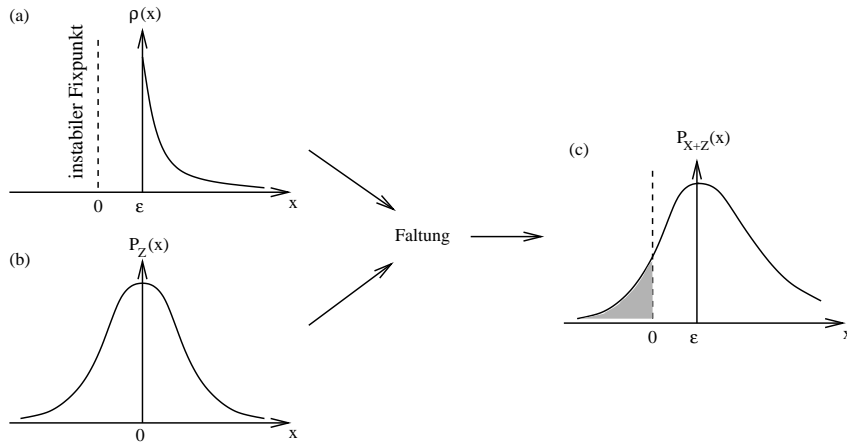


Abbildung 3.16: Schematische Darstellung einer rauschinduzierten Krise in der kubischen Abbildung: (a) Häufigkeitsverteilung der positiven  $x$ -Werte des Attraktors. Der Abstand zwischen den minimalen Amplituden und dem instabilen Fixpunkt ist  $\epsilon$ . (b) Häufigkeitsverteilung eines Gauß'schen weißen Rauschens  $\sqrt{D}\xi(t)$ . (c) Durch Faltung entstandene neue Häufigkeitsverteilung der  $x$ -Werte mit einem deterministischen Anteil  $X$  und einem stochastischen Anteil  $Z$ . Die  $x$ -Werte im schraffierten Bereich dieser neuen Verteilung ermöglichen Sprünge zwischen den Subattraktoren.

schen dem Attraktor und dem Einzugsgebiet schaffen kann, wenn die Summe von dem stochastischen Antrieb und dem deterministischen Anteil größer ist als ein kritischer Wert  $A_c$ . Der kritische Wert  $A_c$  ist so definiert, dass er mit dem Wert  $x$  des ungestörten Systems übereinstimmt, für den bei der Verschmelzkrise der Attraktor mit dem Einzugsgebiet des anderen Attraktors kollidiert. Wird bei festgehaltenem Kontrollparameter  $p < p_c$  die Rauschintensität  $D$  erhöht, steigt die Wahrscheinlichkeit für ein Überschreiten von  $A_c$ , und folglich bietet sich häufiger die Möglichkeit für einen Sprung von Subattraktor zu Subattraktor.

Wie wir bereits bei der Verschmelzkrise gesehen haben, wird die Topologie von Attraktor und Einzugsgebiet durch die Kollision nicht verändert. Unter der Annahme, dass dies im Falle der rauschinduzierten Krise ebenso ist, konnte Sommerer [41] für die mittlere Verweildauer  $\langle \tau \rangle$  das folgende Skalierungsgesetz aufstellen:

$$\langle \tau \rangle \sim g \left( -\frac{\sqrt{D}}{R - R_c} \right) (\sqrt{D})^{-\gamma} \quad (3.13)$$

Der Exponent  $\gamma$  ist hierbei identisch mit dem der rauschfreien Krise, denn er ergibt sich allein aus der Topologie. Die zusätzliche Funktion  $g(\cdot)$  ist systemspezifisch und hängt zusätzlich von den Eigenschaften des Rauschens ab.

In Abb. 3.16 ist nochmals die Idee dieser rauschinduzierten Krise dargestellt: Die Faltung der Häufigkeitsverteilung von positiven  $x$ -Werten mit der Häufigkeitsver-

teilung des stochastischen Antriebs führt zur Krise. Die dabei skizzierte Situation ist vergleichbar mit der rauschinduzierten Krise in der kubischen Abbildung. In Abb. 3.16(a) ist eine der beiden Häufigkeitsverteilungen aus Abb. 3.12(a) skizziert, die ihren minimalen Wert bei  $\epsilon$  hat. Der instabile Fixpunkt liegt bei  $x = 0$ . Das Rauschen wird hier als Gauß'sches weißes Rauschen angenommen, woraus sich folgende Relationen ergeben:  $\langle \xi \rangle = 0$  und  $\langle \xi(t) - \xi(t') \rangle = \delta(t - t')$ . Durch die Faltung mit dem Rauschen entsteht eine gemischte Amplitudenverteilung von  $x$  mit stochastischen und deterministischen Anteilen. Von der resultierenden Amplitudenverteilung generiert der schraffierte Bereich einen stochastischen Überlapp zwischen dem Attraktor und dem Einzugsgebiet.

Für Abb. 3.17 wurde die schematisch dargestellte Situation einer rauschinduzierten Krise an der kubischen Abbildung für numerisch erzeugte Daten quantitativ ausgewertet. Die Häufigkeitsverteilung der kubischen Abbildung in (a) wurde ohne Rauschen für den Kontrollparameter  $a = 3.596 < a_c = \frac{3}{2}\sqrt{3} + 1 \approx 3.598076$  erzeugt und ist identisch mit der aus Abb. 3.12(a). Wie man in Teil (b) der Darstellung sieht, führt bei festgehaltenem Kontrollparameter  $a$  bereits eine geringe Rauschstärke von  $\sqrt{D} = 10^{-5}$  zu einem Verschmelzen der beiden Attraktoren. Fortan beobachtet man intermittentes Springen zwischen den beiden Subattraktoren. Im Teil (c) schließlich ist der Verlauf der mittleren Verweildauer  $\langle \tau \rangle$  dargestellt. Der Exponent  $\gamma$  stimmt mit 0.5 genau mit dem Wert überein, der für den Fall einer Intermittenz ohne Rauschen gefunden wurde (siehe Abb. 3.12).

### 3.3 Intermittenz am Shinriki-Oszillator

Oberhalb von  $R_c$  zeigt der Shinriki-Oszillator kriseninduzierte Intermittenz, deren mittlere Verweildauer und weitere statistische Eigenschaften wesentlich für die Untersuchung der stochastischen Resonanz sind. Darüber hinaus wurde die rauschinduzierte Krise an diesem System genauer untersucht. Für die Analyse der kriseninduzierten Intermittenz im experimentellen System wurden eine Serie von langen  $V_1$ -Zeitreihen gemessen, wobei der Kontrollparameter in Schritten von  $10\Omega$  erhöht wurde. Charakteristisch für diese Zeitreihen sind zwei Zeitskalen: Die schnelle intrinsische Oszillation – von der eine Anzahl von bis zu 500000 für diese statistische Auswertung benutzt wurden – und die langsame Zeitskala der intermittenten Sprungdynamik zwischen den Subattraktoren. Für die kriseninduzierte Intermittenz ist nur die langsame Zeitskala interessant. Betrachtet man den in Abb. 3.18(a) dargestellten Ausschnitt einer  $V_1$ -Zeitreihe, zeigt dieser, dass in der Analyse aufgrund des Überschwingens über  $V_1 = 0V$  (gekennzeichnet durch die gestrichelte Linie) kein einfaches Verfahren wie bei der kubischen Abbildung zur Sprungdetektion verwandt werden kann. Die in Abb. 3.18(b) dargestellte Zeitreihe wurde durch eine Filterung der ursprünglichen  $V_1$ -Dynamik erzeugt und beinhaltet nur noch die langsame Sprungdynamik. Entscheidend für den verwandten Filter sind zwei Schwellen, die das Unterscheidungskriterium für einen Sprung von Subattraktor zu Sub-

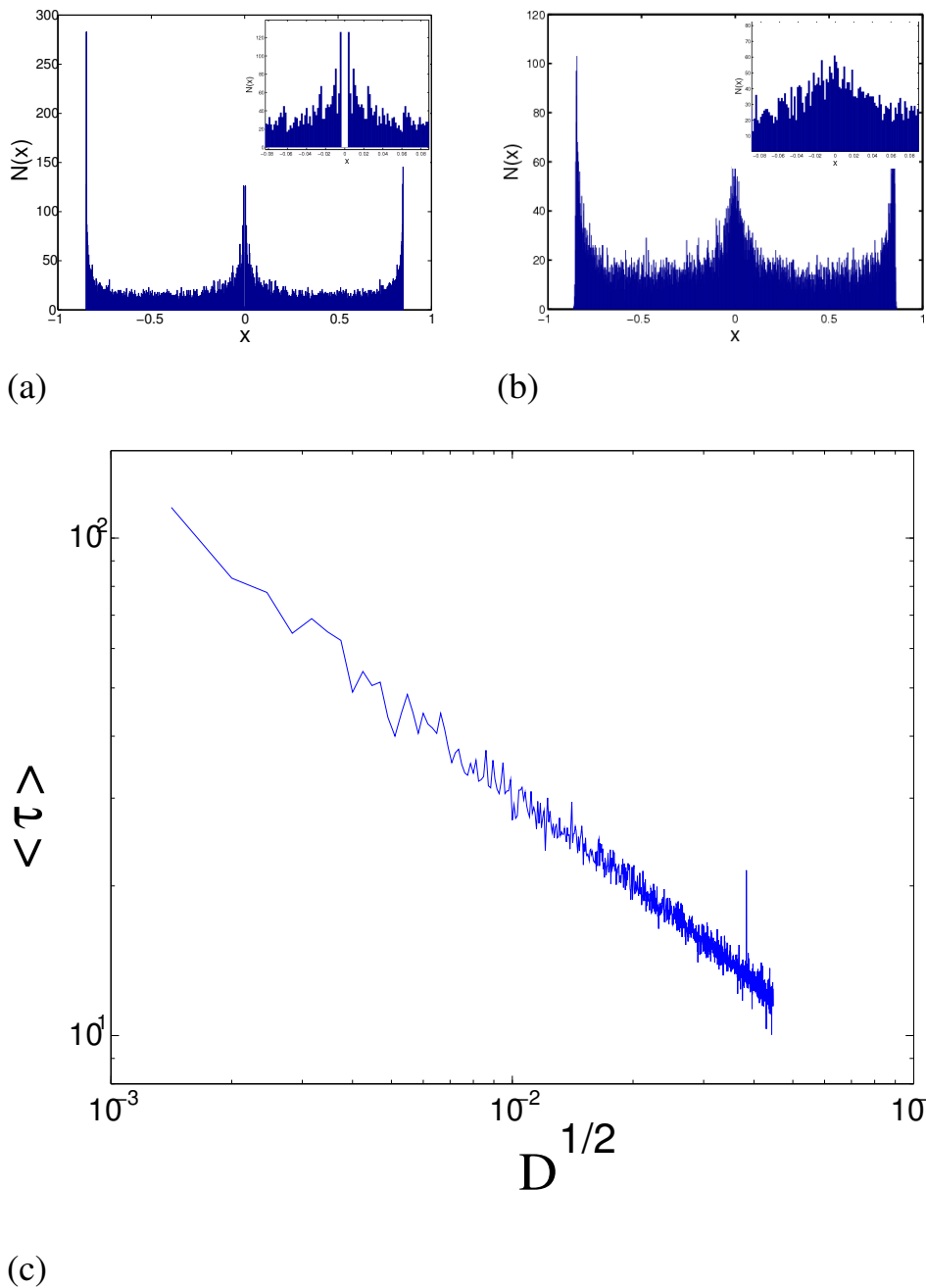


Abbildung 3.17: Amplitudenhäufigkeitsverteilung  $N(x)$  und mittlere Verweilzeit  $\langle \tau \rangle$  für eine rauschinduzierte Krise an der kubischen Abbildung. (a) Häufigkeitsverteilung für einen Kontrollparameterwert von  $a = 3.596 < a_c$  ohne zusätzlichen stochastischen Antrieb. (b) Häufigkeitsverteilung mit stochastischem Antrieb mit einer Rauschamplitude von  $\sqrt{D} = 10^{-5}$ : Obgleich  $a = 3.596 < a_c$  springt das System zwischen den beiden Subattraktoren und auch in der Vergrößerung ist keine Lücke bei  $x = 0$  erkennbar. (c) Verlauf von  $\langle \tau \rangle$  als Funktion von  $\sqrt{D}$  in doppelt-logarithmischer Darstellung. Über den ganzen Bereich ist das Skalierungsgesetz (3.13) erkennbar mit einem Skalierungsexponenten von  $\gamma = 0.5$ .



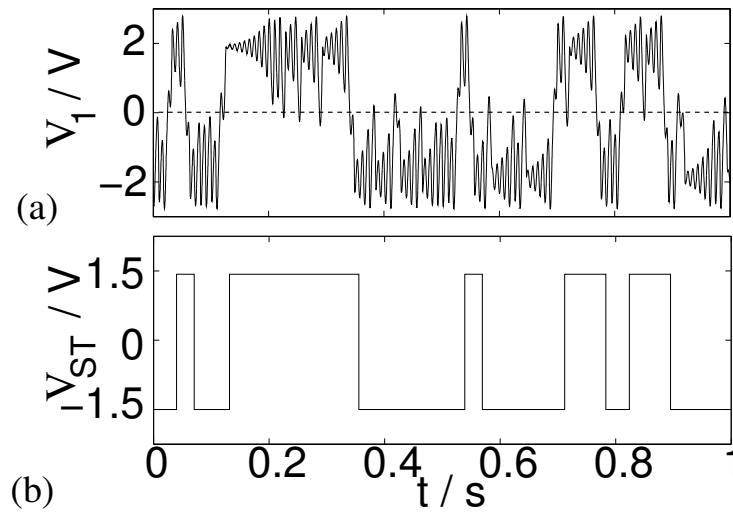


Abbildung 3.18: Filterung der  $V_1$ -Zeitreihe: (a) Ausschnitt einer ungefilterten Zeitreihe von  $V_1$ : Bereits im ungefilterten Signal sind die zwei Zeitskalen erkennbar. Die gestrichelte Linie bezeichnet  $V_1 = 0$  V und macht die zahlreichen Überschwinger der schnellen Dynamik deutlich. (b) Gefilterte Zeitreihe: Nach der Filterung mit zwei Schwellen bei  $\pm 2$  V bleibt nur noch die langsame Sprungdynamik zwischen den Subattraktoren erhalten.

attraktor liefern. Als Schwellenwerte wurden die ungefähren Positionen der instabilen Fixpunkte im Zentrum der Subattraktoren bei  $\pm 2$  V gewählt. Das Ergebnis dieser Filterung hängt aber nicht vom konkreten Schwellenwert ab, wie Versuche mit anderen Werten ( $\pm 1.5$  V und  $\pm 2.2$  V) zeigten. Diese Unabhängigkeit vom konkreten Schwellenwert ist bereits aus anderen Untersuchungen bekannt [42] und lässt sich sehr einfach anschaulich verstehen: Für höhere Schwellenwerte wird das gefilterte Signal erst später einen Sprung zeigen als das reale System, aber auch erst später zurückspringen. Verringert man den Betrag des Schwellenwerts, so nimmt die Verzögerung zwischen einem tatsächlichem Sprung und der gefilterten Dynamik beidseitig – beim Hin- und Rücksprung – ab, die Verweildauer im Zustand bleibt aber konstant. Natürlich kann der Schwellenwert nicht beliebig gewählt werden, solange er aber größer als der maximale Betrag des Überschwingens ist, bleiben die Ergebnisse bei symmetrischen Systemen gleich.

Für die Analyse der mittleren Verweildauer  $\langle \tau \rangle$  wurde ein Filter direkt in das LABVIEW Programm integriert, mit dem auch die verwandte Meilhaus-Transienten-Karte ausgelesen und die digitalen Xicor Widerstände angesteuert wurden. Nach der Filterung und den daraus resultierenden Verweildauern wurde für jeden Kontrollparameter der Mittelwert gebildet, der  $\langle \tau \rangle$  ergibt<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Die Abweichung von  $\langle \tau \rangle$  in den beiden Zuständen, die sich aufgrund der Asymmetrie ergibt, ist so gering, dass sie vernachlässigt werden kann.

### 3.3.1 Verschmelzkrise am Shinriki-Oszillator

In Abb. 3.19 ist die mittlere Verweildauer  $\langle\tau\rangle$  in Abhängigkeit von  $\Delta R$  doppelt-logarithmisch aufgetragen. Der Verlauf von  $\langle\tau\rangle$  lässt sich in drei Bereiche unterteilen: (a) von 0 bis ca.  $100\Omega$ , b)  $100$  bis  $2500\Omega$  und c)  $2.5$  bis  $20k\Omega$ . Im Bereich (b) ist das Skalierungsgesetz (3.11) gut erfüllt und es ergibt sich ein kritischer Exponent von  $\gamma = 0.69(1 \pm 2\%)$ , wobei der Fehler im Wesentlichen aus der Größe des gefitteten Bereiches resultiert.

Der Bereich (a) bei kleinen Werten von  $\Delta R$  ist gekennzeichnet durch eine zu hohe mittlere Verweildauer  $\langle\tau\rangle$ . Eine solche Abweichung vom Skalierungsgesetz (3.11) so nahe am kritischen Kontrollparameter  $R_c$  ist ungewöhnlich. Um die Ursache für diese Abweichung zu finden, wurde die Hypothese [43] getestet, dass dieser Verlauf durch intrinsisches Rauschen verursacht wird. Hierfür wurde ein Rauschen in den Schwingkreis eingekoppelt, das vom Funktionsgenerator Wave-tek 395 erzeugt wurde. Die Intensität des Rauschens wurde bei mehreren Messungen erhöht. Dabei stellte sich im Widerspruch zu der Hypothese heraus, dass ein höheres Rauschen im Schwingkreis zu einer Verminderung von  $\langle\tau\rangle$  führt. Eine andere Vermutung, die auf Kittel [44] zurückgeht, führt diese Abweichung auf den Operationsverstärker im NIC-Element zurück. Dieser besitzt als einziges Bauteil eine ausreichende Dämpfung, um die Abweichung zu verursachen. Für diese Vermutung spricht die endliche *slew rate*, mit der ein Operationsverstärker seine Spannung am Ausgang ändern kann, von  $16V/\mu s$ . Für  $\Delta R$  sehr nahe 0 erniedrigt die endliche Antwort des Operationsverstärkers vermutlich die Sprunghäufigkeit, denn bei einem sehr kleinen Überlapp zwischen dem Subattraktor und dem Pseudo-Einzugsgebiet besteht immer nur sehr kurz eine Möglichkeit für einen Sprung zwischen den Subattraktoren.

Der Bereich (c) ( $2.5$  bis  $20k\Omega$ ) ist durch das Auftreten von periodischen Fenstern geprägt. Die beiden periodischen Fenster bei  $\Delta R = 2.5k\Omega$  und  $8k\Omega$  sind deutlich durch den drastischen Abfall von  $\langle\tau\rangle$  erkennbar. Die periodischen Fenster verursachen einen schnellen Wechsel zwischen den beiden Subattraktoren mit einer Frequenz von etwa  $170Hz$ . Wie bereits in der Simulation der kubischen Abbildung endet mit dem Auftreten dieser Fenster der Bereich, in dem das Skalierungsgesetz für kriseninduzierte Intermittenz erfüllt ist. Ebenso zeigen numerische Untersuchungen der Flussgleichungen (2.1) [45], dass der Shinriki-Oszillator bei kleineren Werten von  $\Delta R$  periodische Fenster besitzt. Offensichtlich sind diese bereits durch ein geringes intrinsisches Rauschen ausgeschmiert und damit nicht zu beobachten, was analog zu den Ergebnissen an der kubischen Abbildung ist (vgl. Abb. 3.13).

Das Ende des Skalierungsbereiches oberhalb von  $\Delta R = 2.5k\Omega$  ist verknüpft mit dem Auftreten eines weiteren Intermittenz-Types. Ein Zeitreihenabschnitt kurz nach dem ersten periodischen Fenster ist in Abb. 3.20 zu sehen. Die Dynamik ist durch einen Wechsel zwischen einer periodischen und chaotischen Phase bestimmt und zeigt Pomeau-Manneville-artiges Intermittenzverhalten.

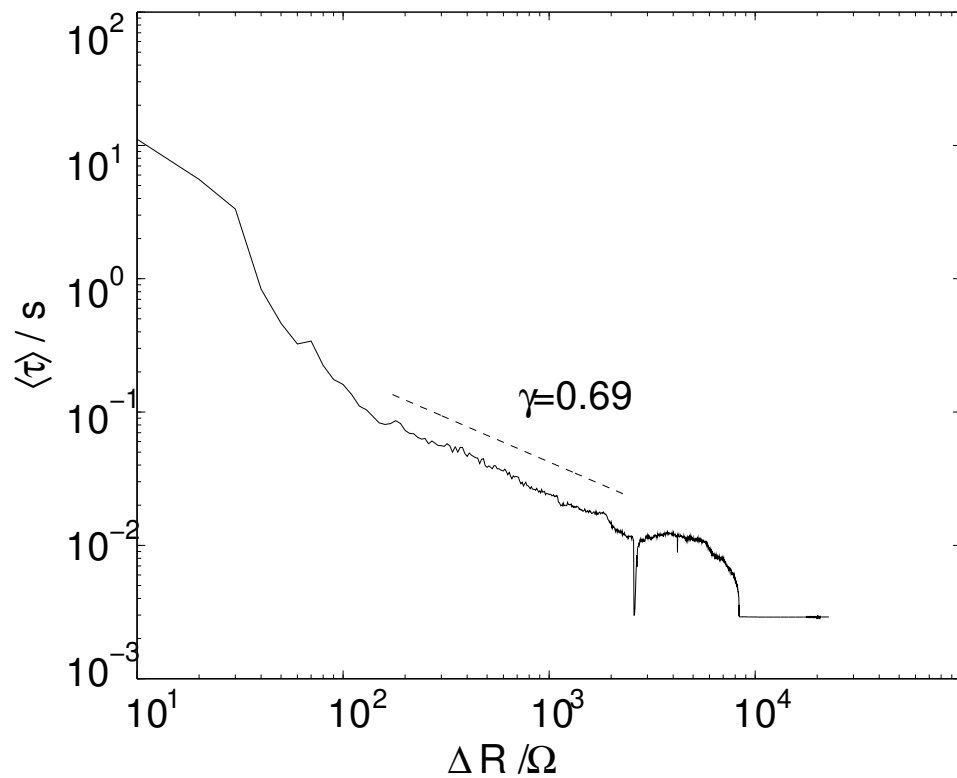


Abbildung 3.19: Doppelt-logarithmische Darstellung der Abhängigkeit zwischen der mittleren Verweildauer  $\langle \tau \rangle$  und  $\Delta R = R - R_c$ . Die gestrichelte Linie deutet das Skalieren mit (3.11) an. Als Skalierungsexponent ergibt sich  $\gamma \approx 0.69$ . Der drastische Abfall von  $\langle \tau \rangle$  bei  $\Delta R \approx 2.5\text{k}\Omega$  und  $\approx 8\text{k}\Omega$  deutet auf zwei periodische Fenster hin.

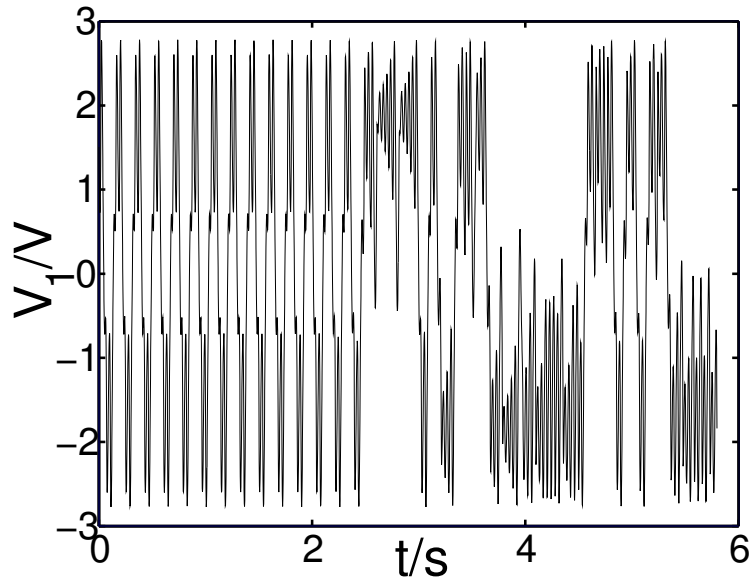


Abbildung 3.20: Ausschnitt aus einer  $V_1$ -Zeitreihe bei  $\Delta R = 3.2\text{k}\Omega$ , die Pomeau-Manneville-artige Intermittenz zeigt: Deutlich ist der Wechsel zwischen periodischen und chaotischen Oszillationen erkennbar.

Um die statistische Unabhängigkeit der Sprünge im Intermittenzregime zu zeigen, wurde zusätzlich die Verteilung der Verweildauern gemessen. In Abb. 3.21 sind zwei dieser Verteilungen beispielhaft dargestellt. Die eine Verteilung entstand aus einer Zeitreihe, gemessen bei einem Kontrollparameterwert von  $\Delta R \approx 1\text{k}\Omega$ . Bei diesem Kontrollparameterwert sind die Messdaten von  $\langle \tau \rangle$  in guter Übereinstimmung mit dem Skalierungsgesetz (3.11), und der Schwingkreis befindet sich noch vor dem ersten periodischen Fenster. Die zweite Verteilung wurde aus einer Zeitreihe erzeugt, die nach dem ersten periodischen Fenster bei  $\Delta R \approx 4.5\text{k}\Omega$  gemessen wurde. Beide Verteilungen zeigen einen exponentiellen Abfall, der ein typisches Merkmal für statistische Unabhängigkeit darstellt.

Diese verschwindende Korrelation zwischen den Sprüngen ist von besonderem Interesse für die rauschfreie stochastische Resonanz, bei deren Interpretation ich nochmals auf diese Unabhängigkeit eingehen werde. Wichtig ist, dass außerhalb der periodischen Fenster überall ein exponentieller Zerfall gemessen wurde, dessen Exponent allein von  $\Delta R$  abhing. Diese Eigenschaft des Shinriki-Oszillators ist nicht weiter verwunderlich, schließlich sind über den Bereich der kriseninduzierten Intermittenz Lyapunov-Exponent (Abb. 3.2) und Korrelationsdimension (Abb. 3.3) nahezu konstant. Des Weiteren ändern sich die topologischen Eigenschaften des Attraktors nicht wesentlich. Dies belegt eindrücklich die Ähnlichkeit der beiden Poincaré-Abbildungen in Abb. 3.8, die kurz vor und nach dem ersten periodischen Fenster konstruiert wurden.

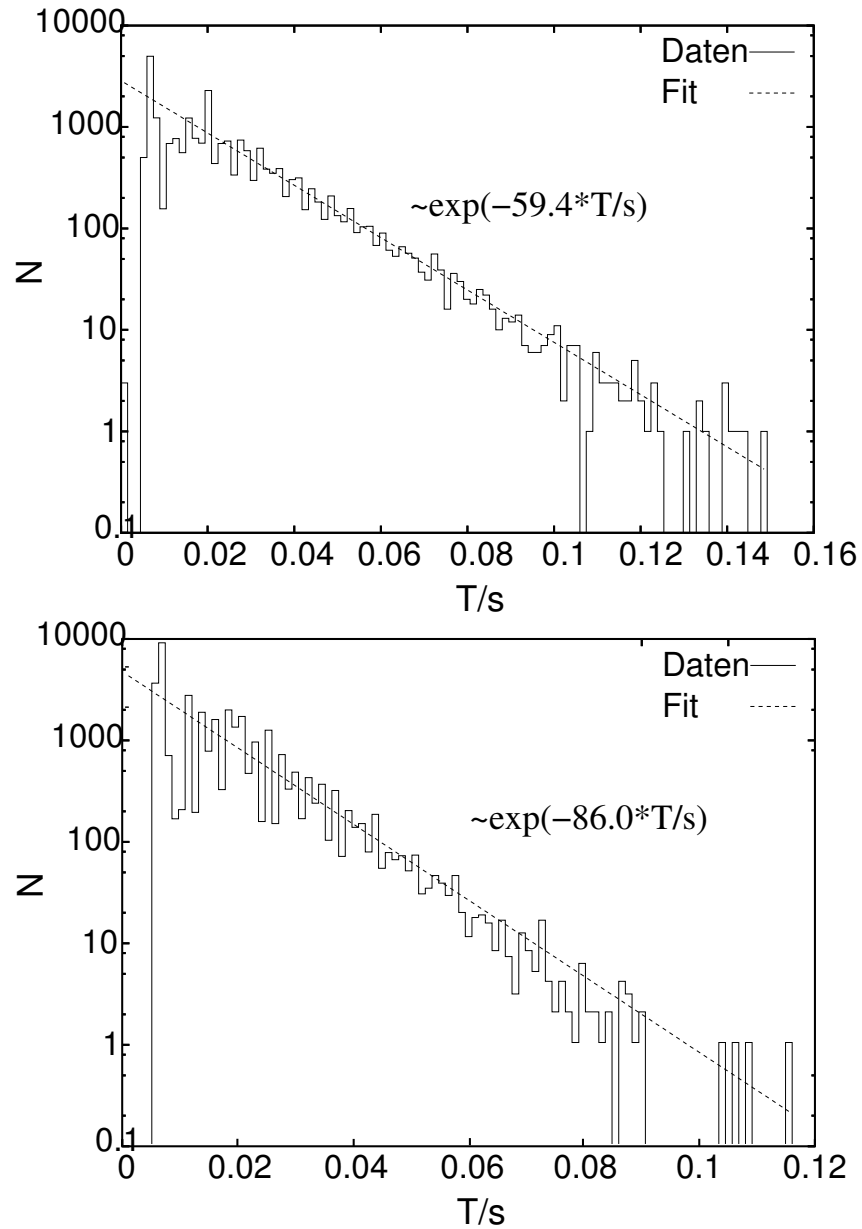


Abbildung 3.21: Häufigkeitsverteilung der Verweildauern beim Shinriki-Oszillator im Bereich der kriseninduzierten Intermittenz: (a)  $\Delta R \approx 1\text{k}\Omega$  und somit im Skalierungsbereich von (3.11). (b)  $\Delta R \approx 4.5\text{k}\Omega$  nach dem ersten periodischen Fenster.

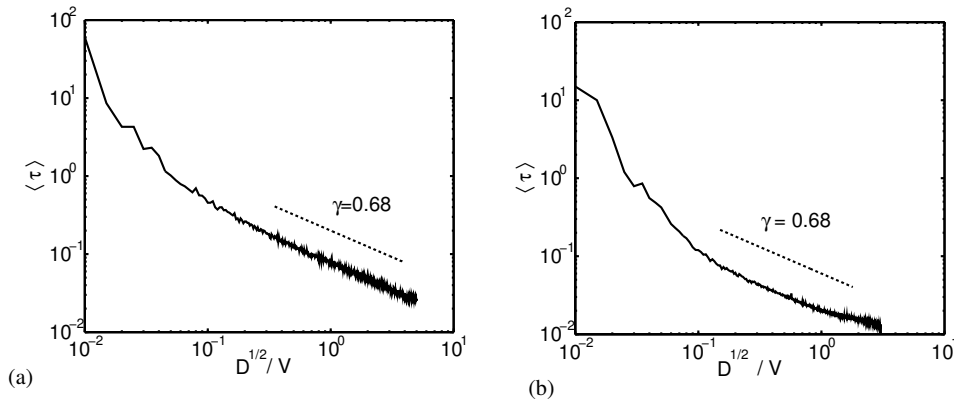


Abbildung 3.22: Doppelt-logarithmische Darstellung der mittleren Verweildauer  $\langle \tau \rangle$  als Funktion der angelegten Rauschstärke. Bandbreite des Rauschens: (a) 0.1 – 60kHz, (b) 0.1 – 70Hz. Der Skalierungsbereich ist durch eine gestrichelte Linie angedeutet.

### 3.3.2 Rauschinduzierte Krise im Shinriki-Oszillator

Das Skalierungsgesetz für rauschinduzierte Krisen (3.13) wurde experimentell überprüft. Hierzu wurde in den Schwingkreis unterhalb der Krise bei einem festen Kontrollparameterwert von  $\Delta R = -200\Omega$  bandbreiten beschnittenes Rauschen variabler Stärke eingekoppelt. Die zwei untersuchten Rauschbandbreiten betrugen 0.1 – 60kHz und 0.1 – 70Hz, womit das erste bis zu eine Größenordnung schneller, das andere eine Größenordnung langsamer als die intrinsische Dynamik auf den Subattraktoren (630Hz) ist. Bei festgehaltener Bandbreite wurde die Varianz des Rauschens von 0 bis 5V erhöht und  $\langle \tau \rangle$  aus den Zeitreihen bestimmt.

Die Messergebnisse sind in Abb. 3.22 dargestellt. Insbesondere für die große Bandbreite (0.1 – 60kHz) folgt  $\langle \tau \rangle$  dem Skalierungsgesetz (3.13) über einen weiten Bereich von  $\sqrt{D}$ . Für die kleinere Bandbreite ist der Einfluss der Dämpfung des NIC-Elements bei kleinen Rauschstärken deutlicher. Analog zu der rauschinduzierten Krise an der kubischen Abbildung (vgl. Abb. 3.17) zeigen sich keinerlei Einflüsse durch periodische Fenster. Als Skalierungsexponent ergibt sich für beide Messungen  $\gamma = 0.68(1 \pm 2\%)$ . Dieser Wert liegt sehr nah bei dem Wert, der ohne Rauschen gemessen wurde ( $\gamma = 0.69$ ).

Um die Übereinstimmung der Messdaten mit dem modifizierten Skalengesetz (3.13) zu überprüfen, wurde die Funktion  $g(\cdot)$  bestimmt. Hierzu wurde der Kontrollparameter  $\Delta R$  erhöht, während ein Rauschen fester Bandbreite und fester Rauschstärke am System anlag. Aus Gl. (3.13) folgt, dass die Funktion  $g(\cdot)$  ermittelt werden kann, indem man  $\langle \tau \rangle \cdot \sqrt{D}^\gamma$  gegen das Argument der Funktion  $\Delta R/\sqrt{D}$  aufträgt. Abb. 3.23 zeigt für jeweils vier Rauschstärken und die beiden untersuchten Bandbreiten den ermittelten Verlauf von  $g(\cdot)$  in Abhängigkeit von der Rauschstärke. Während die hohe Bandbreite zu einem  $g(\cdot)$ -Verlauf führt, der für alle Rausch-

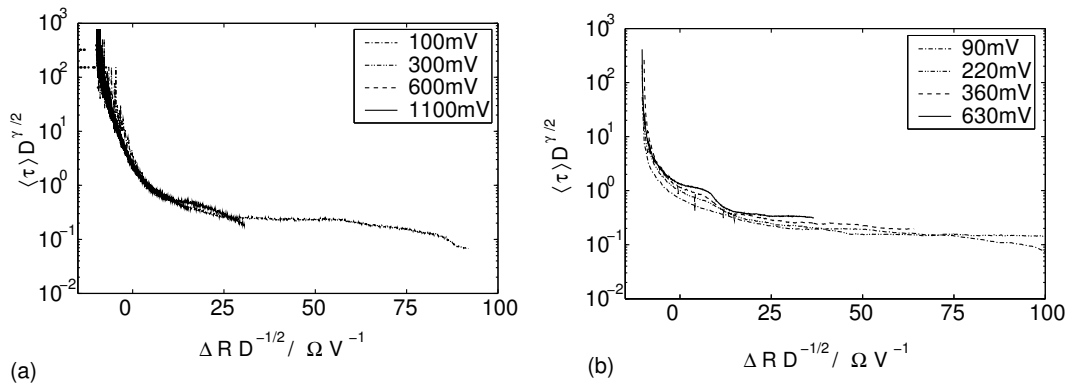


Abbildung 3.23: Ermittelter Verlauf der nicht-universellen Funktion  $g(\cdot)$ . Bandbreite des Rauschens: (a) 0.1 – 60kHz und (b) 0.1 – 70Hz. Für jede Bandbreite wurde  $g(\cdot)$  bei vier verschiedenen Rauschstärken bestimmt.

stärken nahezu identisch ist, zeigt sich bei der schmalen Bandbreite ein Plateau. Dieses Plateau weist auf eine konstante Verweildauer  $\langle \tau \rangle$  hin und ist offensichtlich durch ein periodisches Fenster verursacht. Anhand des Wertes von  $\langle \tau \rangle$  konnte das zweite periodische Fenster bei  $\Delta R \approx 8\text{k}\Omega$  als Ursache identifiziert werden<sup>3</sup>. Das Skalierungsgesetz (3.13) gilt jedoch nur für quasihyperbolische Systeme, weshalb die Abweichungen aufgrund eines periodischen Fensters zu erwarten waren.

### 3.4 Zusammenfassung

Der Shinriki-Oszillator zeichnet sich im Intermittenzbereich durch einen topologisch stabilen Attraktor aus, dessen maximaler Lyapunov-Exponent (Abb. 3.2) und Korrelationsdimension (Abb. 3.3) nur sehr wenig variieren. Das Zusammenwirken von schnellen chaotischen Oszillationen und langsamen “zufälligen” Sprüngen machen den Shinriki-Oszillator zu einem Modellsystem, an dem Unterschiede zwischen stochastischer und deterministischer Dynamik sehr gut herausgearbeitet werden können.

Diese Untersuchungen, die in den folgenden Kapiteln anhand des Phänomens der stochastischen Resonanz in stochastischen und intermittenten Systemen vorgestellt werden, sind besonders interessant, weil der Shinriki-Oszillator einen Archetypus für Systeme mit kriseninduzierter Intermittenz darstellt. Wie generisch die beobachtete Verschmelzkrise und der sich anschließende Bereich kriseninduzierter Intermittenz im Shinriki-Oszillator ist, belegen die Vergleiche der theoretischen Skalierungsgesetze (3.11) und (3.13) mit den experimentellen Daten aus Abb. 3.19 und Abb. 3.22.

<sup>3</sup>Im Phasenraum und in den Zeitreihen zeigt sich bei diesen Rauschstärken eine verrauschte periodische Oszillation, die zu diesem Fenster passt.





# Kapitel 4

## Stochastische Resonanz

Unter stochastischer Resonanz versteht man den Effekt, dass stochastisch getriebene Systeme eine zusätzlich angelegte schwache Modulation bei einer nichtverschwindenden Rauschintensität optimal verstärken, wohingegen die Modulation ohne Rauschen praktisch keinen Einfluss auf die Dynamik des Systems hat. Rauschen, das normalerweise eher die Signalqualität stört, sorgt bei der stochastischen Resonanz für eine hohe Güte des übertragenen Signals. Systeme, die stochastische Resonanz zeigen, sind zahlreich und kommen in den verschiedensten Gebieten vor, wie z.B. der Physik [46, 47, 48], Meteorologie [6, 7], Chemie [49], Neurologie [50] und Elektronik [20]. Die gemeinsame Eigenschaft dieser Systeme ist, dass sie zwei oder mehrere Zustände besitzen, die voneinander durch eine Schwelle getrennt sind. In diesem Kapitel wird das Phänomen der Signalverbesserung durch Rauschen anhand von experimentellen Daten eines bistabilen Systems unter Einfluss von stochastischer und periodischer Anregung vorgestellt. Für die phänomenologische Einführung werde ich das einfachste experimentelle System benutzen, das stochastische Resonanz zeigt: den Schmitt-Trigger. Die hierbei gewonnenen Erkenntnisse bieten einen guten Zugang zur folgenden theoretischen Modellierung der stochastischen Resonanz.

### 4.1 Stochastische Resonanz am Schmitt-Trigger

Experimente mit Schmitt-Trigger sind von besonderer Bedeutung für die Entwicklung der stochastischen Resonanz. So gelang es Heslot und Fauve 1984 an diesem System, den ersten experimentellen Nachweis stochastischer Resonanz zu erbringen [51]. Auch bei aktuellen Entwicklungen auf diesem Gebiet wie z. B. der netzwerkverstärkten stochastischen Resonanz (*array-enhanced stochastic resonance*) [52], der rauschinduzierten Propagation [53] und der Kontrolle der stochastischen Resonanz [54] spielen Experimente mit Schmitt-Trigger immer wieder eine wichtige Rolle zur Bestätigung neuartiger Konzepte und Ideen.

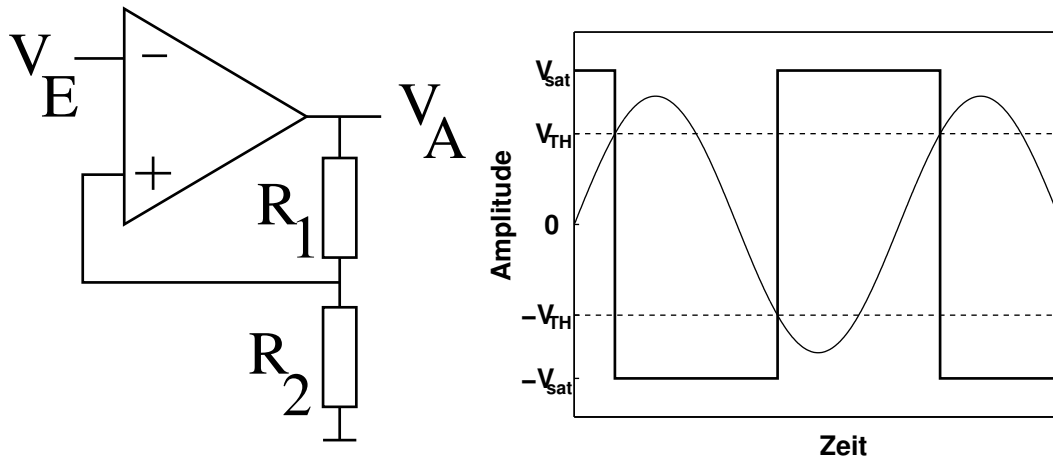


Abbildung 4.1: (a) Schaltplan eines Schmitt-Trigger Experiments.  $V_E$  ist die Eingangs- und  $V_A$  die Ausgangsspannung. (b) Antwortverhalten eines Schmitt-Triggers: Überschreitet die sinusförmige Anregungsspannung  $V_E$  den Schwellwert des Schmitt-Triggers  $V_{TH}$  oder unterschreitet sie  $-V_{TH}$ , springt die Ausgangsspannung  $V_A$  von  $+V_{sat}$  auf  $-V_{sat}$  bzw. umgekehrt.

In Abb. 4.1 sind ein Schaltdiagramm (a) und eine Beispielzeitreihe (b) eines Schmitt-Triggers dargestellt. Der skizzierte invertierende Schmitt-Trigger ist aus einem Operationsverstärker und zwei Widerständen aufgebaut. Dies führt zu einer Dynamik des Schmitt-Triggers, die nur zwei stabile Zustände hat. Bei Über- (Unter-) schreiten einer positiven (negativen) Schwellenspannung  $V_{TH}$  wechselt die Ausgangsspannung  $V_A$  vom positiven (negativen) Sättigungswert  $V_{SAT}$  zum negativen (positiven)<sup>1</sup>.

Das vorgestellte bistabile Verhalten eines Schmitt-Triggers lässt sich sehr leicht numerisch simulieren. Das einfachste numerische Modell ist die folgende Schmitt-Trigger-Abbildung:

$$\begin{aligned} V_A(n+1) &= V_{SAT} \operatorname{sgn}(f(V_A(n)) - V_E) . \\ f(V_A(n)) &= \vartheta \cdot V_A(n) = V_{TH} \end{aligned} \quad (4.1)$$

$V_A$ ,  $V_{SAT}$  und  $V_E$  ist die Ausgangs-, die positive Sättigungs- bzw. die Eingangsspannung des Schmitt-Triggers,  $n$  ist die Iterationsvariable und  $\operatorname{sgn}$  bezeichnet die Sprungfunktion. Durch die Multiplikation der Ausgangsspannung im vorhergehenden Zeitschritt  $V_A(n)$  mit der sogenannten Spannungsteilerkonstanten  $\vartheta$  im Argument der Sprungfunktion besitzt diese Abbildung ein mit realen Schmitt-Trigger vergleichbares Hysterese-Verhalten.

Ogleich dieses einfachste Modell eines Schmitt-Triggers nicht alle Eigenschaften eines realen besitzt – man denke nur an die sehr hohe, aber endliche Antwort

<sup>1</sup>Die genauen Details der verwendeten Schmitt-Trigger-Schaltung und die Berechnung des Wertes von  $V_{TH}$  findet sich im Anhang B.

der realen Bauteile des Schmitt-Triggers<sup>2</sup> – werden numerische Untersuchungen dieser Abbildung sehr häufig zum Vergleich mit realen Messdaten herangezogen [52, 54, 55].

Als ersten Schritt zur stochastischen Resonanz will ich die Antwort eines Schmitt-Triggers auf einen rein stochastischen Antrieb aufzeigen. Hierzu wurde in einer numerischen Simulation die Eingangsspannung  $V_E(t)$  als Gauß'sches weißes Rauschen angenommen:

$$V_E(n) = \sqrt{D}\xi(n) \quad (4.2)$$

$\sqrt{D}\xi(n)$  sei dabei eine stochastische Spannung, die folgenden Relationen genügt:

$$\langle \xi(n')\xi(n) \rangle = \delta(n' - n) \quad \langle \xi(n) \rangle = 0. \quad (4.3)$$

Die Mittelung in der ersten Relation ist ein Zeitmittel und ergibt als Rauschintensität<sup>3</sup> gerade 1. Von einem physikalischen Standpunkt her ist die Relation nichts anderes als eine Autokorrelationsfunktion. Daher ergibt sich für  $V_E$  ein flaches Spektrum mit einer konstanten Intensität von  $D$ :

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp(-i\omega\tau) D \langle \xi(\tau)\xi(0) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp(-i\omega\tau) D \delta(\tau) = D$$

Sowohl in realen Experimenten als auch in numerischen Simulationen ist ein Rauschen mit einem vollständig flachen Spektrum nicht realistisch. So führt die Diskretisierung der Zeit in (4.1) dazu, dass das Spektrum des eingekoppelten Rauschens in der Bandbreite begrenzt und nicht weiß ist. Im Folgenden werde ich annehmen, dass ein weißes Rauschen dann vorliegt, wenn das Spektrum des Rauschens eine deutlich höhere Endfrequenz hat als das System, an dem es anliegt.

In Abb. 4.2 sehen wir das Ergebnis einer Simulation von Gl. (4.1) mit einem stochastischen Antrieb, der als Gauß'sches weißes Rauschen angenommen werden kann. In der halblogarithmischen Auftragung ist die mittlere Sprungrate  $r_{ST}$  des Schmitt-Triggers zwischen den beiden Zuständen in Abhängigkeit von der inversen Rauschintensität  $D^{-1}$  dargestellt. Am linearen Verlauf der Kurve sieht man sofort, dass die Sprungrate  $r_{ST}$  mit  $D$  exponentiell verknüpft ist. Dieser Verlauf, der auch in realen Experimenten mit Schmitt-Trigger beobachtet wird, kann folgendermaßen beschrieben werden:

$$r_{st} \sim \exp\left(\frac{c}{D}\right), \quad (4.4)$$

wobei die Konstante  $c$  sich aus den experimentellen Details des Schmitt-Triggers ergibt.

<sup>2</sup>Natürlich existieren eine Vielzahl weiterer Modelle, die diese endliche Antwort berücksichtigen, z. B. in [55]. Besonders hervorzuheben, ist die Arbeit von V. I. Melnikov, dem es erstmals gelang die stochastische Resonanz am Schmitt-Trigger analytisch zu berechnen [56].

<sup>3</sup>Wie bereits bei den rauschinduzierten Krisen werde ich diese Definition der Rauschintensität als  $D$  durchgehend verwenden. Es sei aber daraufhingewiesen, dass in der Literatur zur stochastischen Resonanz ebenso  $2D$  und  $\sigma^2$  als Intensität verwendet werden.

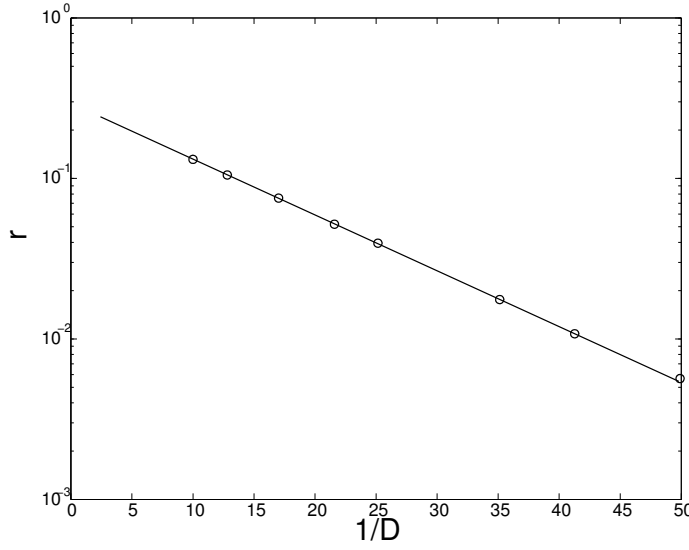


Abbildung 4.2: Numerische Simulation eines durch Rauschen getriebenen Schmitt-Triggers. Dargestellt ist der Verlauf der mittleren Sprungrate  $r$  als Funktion von  $D^{-1}$ .

Um stochastische Resonanz am Schmitt-Trigger zu beobachten, legt man am Eingang zusätzlich zum Rauschen eine periodische Modulation der Amplitude  $A_m$  an, wobei  $A_m$  sehr viel kleiner als die Schwellspannung  $V_{TH}$  ist. Um die Stärke der Synchronisation zwischen dem Schmitt-Trigger-Ausgang und der sinusförmigen Modulation zu messen, benutze ich die Kreuzkorrelationsfunktion:

$$\begin{aligned}
 C_0 &= \max_{\tau_c} \langle V_a(t - \tau_c) \cdot V_m(t) \rangle = \langle V_a(t - \tau_c) \cdot A_m \cos(\omega_m t + \varphi) \rangle \\
 &= \max_{\tau_c} \frac{A_m}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \cos(\omega_m t + \varphi) V_a(t - \tau_c).
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Sie wird in Abhängigkeit von der Rauschintensität gemessen. Die Zeitdifferenz  $\tau_c$ , über die maximiert wird, ist dabei als eine Antwortzeit zu verstehen, mit der die Systemantwort im Vergleich zum Eingangssignal verzögert ist. Aus experimenteller Sicht hat dieses Maß den Vorteil, dass es bei synchronem Messen von periodischem Antrieb und der Systemantwort relativ einfach aus den Messdaten berechnet werden kann. Häufig wird diese Größe auch so normiert, dass  $C_1 \in [-1, 1]$ :

$$C_1 = \frac{C_0}{\sqrt{\langle (V_m(t) - \langle V_m(t) \rangle)^2 \rangle \langle (V_A(t) - \langle V_A(t) \rangle)^2 \rangle}}. \tag{4.6}$$

Hierdurch kann man die stochastische Resonanz unterschiedlicher Systeme oder unterschiedlicher Modulation besser miteinander vergleichen.

In Abb. 4.3 ist die Kreuzkorrelationsfunktion für eine Messung am Schmitt-Trigger dargestellt. Wie man den dargestellten Daten entnehmen kann, zeigt sich

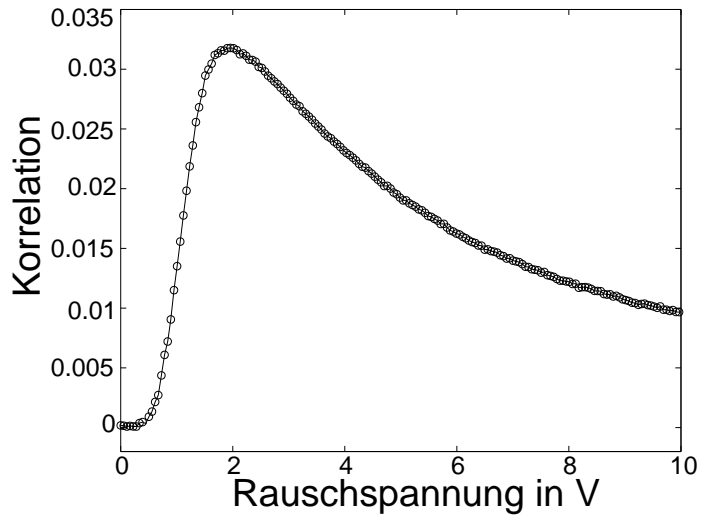


Abbildung 4.3: Kreuzkorrelationsfunktion  $C_0$  gemessen am Schmitt-Trigger-Experiment. Modulationsfrequenz 1kHz, Modulationsamplitude 16mV.

in der Antwort des Schmitt-Triggers auf diese schwache Modulation ein deutliches Maximum bei 2.8V. Ober- und unterhalb der optimalen Rauschspannung nimmt der Wert der Korrelation ab. Diese beiden Grenzfälle sind einfach zu erklären: Bei einer niedrigen Rauschspannung reicht die Summe aus stochastischer und periodischer Anregung nicht aus, um Sprünge zwischen den beiden Zuständen zu erzeugen, wohingegen bei zu großem Rauschen das System so häufig springt, dass die langsame periodische Modulation keinen Einfluss mehr auf das Sprungverhalten hat.

Das Resonanzverhalten in Abb. 4.3 ist typisch für die stochastische Resonanz: In einem weiten Bereich der Rauschstärke zeigt sich am Ausgang des Systems die Frequenz der periodischen Modulation, deren Intensität bei einer optimalen Rauschstärke ein Maximum durchläuft. In symmetrischen Systemen mit starker Dämpfung, für die der Schmitt-Trigger ein Paradebeispiel ist, tritt die maximale Verstärkung bei der Rauschstärke auf, die die *time scale matching condition* erfüllt [1, 55]:

$$T_{ST}(D) = (r_{ST}(D))^{-1} = \frac{T_m}{2} = \frac{1}{2\nu_m} \quad (4.7)$$

Anhand dieser Relation kann der Resonanzmechanismus der stochastischen Resonanz vereinfacht ausgedrückt werden: Das unmodulierte, rauschgetriebene System springt im Mittel mit der Sprungrate  $r_{ST}$ . Interpretiert man diese rauschinduzierte Sprungrate im Sinne einer Eigenfrequenz des Systems  $\nu_\xi = r_{ST}/2$ , so sagt diese Zeitskalenrelation ein verstärktes Mitschwingen des stochastischen Systems voraus, wenn die Modulationsfrequenz  $\nu_m$  nahe der scheinbaren Eigenfrequenz  $\nu_\xi$  ist. Diese Frequenzabhängigkeit der maximalen Verstärkung macht die stochastische Resonanz zu einer echten Resonanz im physikalischen Sinne und zeichnet die stochastische Resonanz als einen Effekt aus, bei dem ein dynamisches Zusammenspiel

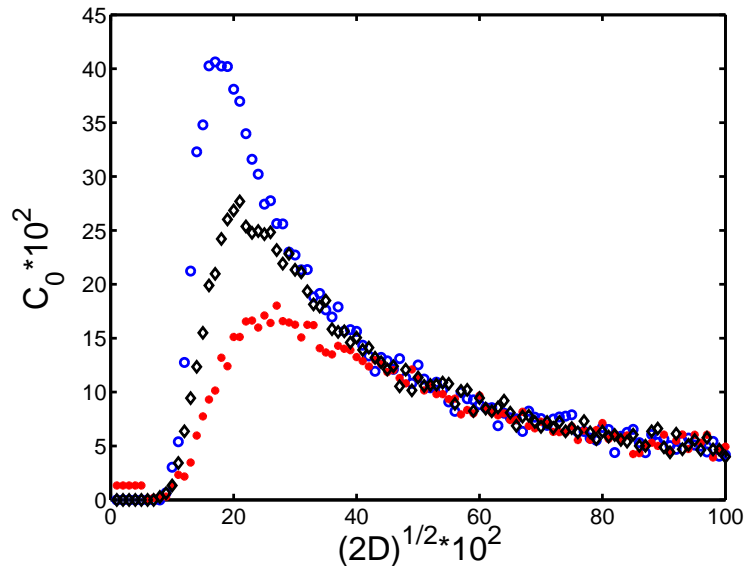


Abbildung 4.4: Numerische Simulation der stochastischen Resonanz an der Schmitt-Trigger-Abbildung (4.1) für unterschiedliche Modulationsfrequenzen. Blaue Kurve:  $\omega_m = 25$ , schwarz:  $\omega_m = 50$ , rot:  $\omega_m = 100$ . Deutlich sichtbar ist die Verschiebung des Resonanzmaximums zu höheren Rauschstärken bei höherer Modulationsfrequenz. In allen Simulationen wurde  $A_m = 0.01$ ,  $\vartheta = 0.25$  und  $V_A = \pm 1$  gewählt. Die dargestellten Ergebnisse ergaben sich aus einer Simulation von 500000 Iterationsschritten.

von Rauschantrieb und Modulation zum verstärkten Mitschwingen führt. Das vorgestellte Resonanzverhalten sollte dabei von anderen Methoden abgegrenzt werden, z.B. dem *dithering* aus der Digitaltechnik. Dieses benutzt ebenso ein System mit einer Schwelle und ein zusätzliches Rauschen zur Signalverbesserung. Bei dieser Methode wird die maximale Verbesserung erreicht, wenn die Rauschintensität gerade der Schwelle entspricht und zwar völlig unabhängig von der angelegten Frequenz der Modulation.

Die Frequenzabhängigkeit der stochastischen Resonanz wird besonders in Abb. 4.4 deutlich, bei der die stochastische Resonanz an der Schmitt-Trigger-Abbildung (4.1) für drei unterschiedliche Modulationsfrequenzen bei festgehaltener Amplitude und Schwelle numerisch simuliert wurde. Das Maximum der Resonanz wandert dabei für höhere Modulationsfrequenz zu größeren Rauschintensitäten und bestätigt somit das anhand der Zeitskalenrelation gewonnene Bild der stochastischen Resonanz. Anstatt die Rauschintensität zu variieren, kann man ebenso ein System mit fester Rauschintensität benutzen und stattdessen die Modulationsfrequenz erhöhen. Bei einem solchen Experiment zeigt sich die stärkste Korrelation zwischen der periodischen Modulation und dem Ausgang bei der jeweiligen Modulationsfrequenz, die dem Doppelten der eingestellten rauschinduzierten Sprungrate entspricht [1].

## 4.2 Theoretische Beschreibung der stochastischen Resonanz

Die vorgestellte stochastische Resonanz am Schmitt-Trigger ist beispielhaft für das Phänomen. McNamara und Wiesenfeld gelang es erstmals 1991 dieses Resonanzverhalten mit den richtigen Frequenzabhängigkeiten theoretisch zu modellieren [55]. Ihr Ratengleichungsansatz der stochastischen Resonanz, den ich im folgenden vorstelle, orientiert sich dabei am Schmitt-Trigger-Experiment von Fauve und Heslot [51]. Analog zur experimentellen Situation gehen sie von einem bistabilen System aus, dessen Ausgang  $x(t)$  zwei diskrete Werte  $\pm c$  annehmen kann. Betrachtet man den Grenzfall, dass Sprünge zwischen den beiden Zuständen sehr schnell geschehen, so kann für die zeitabhängige Aufenthaltswahrscheinlichkeit  $n_{\pm}(t)$  der folgende Ratengleichungsansatz gewählt werden:

$$\begin{aligned}\dot{n}_+(t) &= r_-(t)n_-(t) - r_+(t)n_+(t) \\ \dot{n}_-(t) &= r_+(t)n_+(t) - r_-(t)n_-(t).\end{aligned}\quad (4.8)$$

Dabei ist  $r_{\pm}$  die zeitabhängige Übergangsrate aus dem jeweiligen Zustand  $\pm c$ . Aufgrund der Symmetrie des bistabilen Systems ist der zeitliche Mittelwert der Übergangsraten gleich:  $\langle r_+ \rangle = \langle r_- \rangle$ , und es ergibt sich  $n_+ + n_- = 1$ . Mit dieser Beziehung lässt sich der Ansatz (4.8) umformen:

$$\dot{n}_{\pm} = r_{\mp} - [r_+ + r_-] n_{\pm}. \quad (4.9)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung setzt voraus, dass die Übergangsraten  $r_{\pm}$  bekannt sind. Nimmt man an, dass die explizite Zeitabhängigkeit dieser Übergangsraten von der periodischen Modulation  $s(t)$  mit der auf die Rauschintensität  $D$  normierten Amplitude  $\eta = 2A_m/D$  verursacht wird, können diese Raten als Funktion von  $s(t)$  und einem Parameter  $\mu$  geschrieben werden:

$$r_{\pm}(t) = f(\mu \pm \eta s(t)). \quad (4.10)$$

Der Parameter  $\mu$  ergibt sich für ein bistabiles System als  $2\Delta V/D$ .  $\Delta V$  bezeichnet die Potentialbarriere, die die beiden Zuständen bei  $\pm c$  trennt. Für den Fall einer kleinen Störung ( $\eta \ll 1$ ) kann die Übergangsrate entwickelt werden:

$$r_{\pm}(t) = \frac{1}{2}\alpha_0 \mp \frac{1}{2}\alpha_1\eta s(t) + \frac{1}{2}\alpha_2\eta^2 s^2(t) \mp \dots, \quad (4.11)$$

mit

$$\frac{1}{2}\alpha_0 = f(\mu), \quad \frac{1}{2}\alpha_n = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{d\eta^n} f(\mu). \quad (4.12)$$

Die Größe  $\alpha_0$  ergibt sich aus der rauschinduzierten Sprungrate ohne Modulation, die für den Schmitt-Trigger bereits in Abb. 4.2 vorgestellt wurde. Die Entwicklungskoeffizienten  $\alpha_n$ ,  $n \geq 1$  dieser Taylor-Reihe berechnen sich aus der  $n$ -ten

Ableitung der rauschinduzierten Sprungrate nach dem Kleinheitsparameter  $\eta$ . Die von Mc Namara und Wiesenfeld gewählten Vorfaktoren vereinfachen im Folgenden die Notation der analytischen Rechnung.

Für sehr kleine  $\eta$  kann der störungstheoretische Ansatz (4.11) linearisiert werden. Berücksichtigt man, dass die Übergangsraten  $r_{\pm}$  immer  $r_{+} + r_{-} = \alpha_0$  erfüllen, dann ist die Lösung der Ratengleichung (4.9) gegeben durch:

$$n_{\pm} = \exp(-\alpha_0(t - t_0)) \left( n_{\pm}(t_0) + \int_{t_0}^t dt n_{\mp}(t) \exp(-\alpha_0(t - t_0)) \right). \quad (4.13)$$

Um die Integration der Übergangswahrscheinlichkeiten auszuführen, muss die Signalform  $s(t)$  eingesetzt werden. Geht man von einer sinusförmigen Modulation aus, ergibt sich mit  $s(t) = \sin(\omega t + \phi_{\omega})$ :

$$\begin{aligned} n_{+}(t) &= \exp(-\alpha_0(t - t_0)) \cdot \left( n_{+}(t_0) - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\alpha_1 \eta \cos(\omega t_0 - \phi)}{(\alpha_0^2 + \omega^2)^{1/2}} \right) \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\alpha_1 \eta \cos(\omega t - \phi)}{(\alpha_0^2 + \omega^2)^{1/2}} \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Der erste Term dieser Aufenthaltswahrscheinlichkeit hängt von der Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Anfangszeitpunkts  $n_{+}(t_0)$  ab. Betrachtet man das Systems im eingeschwungenen Zustand, so nimmt der Einfluss dieser Anfangswahrscheinlichkeit exponentiell ab. Betrachtet man den Grenzfall  $t_0 \rightarrow -\infty$ , so lässt sich die Lösung vereinfachen:

$$n_{+}(t) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\alpha_1 \eta \cos(\omega t - \phi)}{(\alpha_0^2 + \omega^2)^{1/2}} \right) \quad (4.15)$$

Aus der Lösung der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten  $n_{\pm}$  kann der Ausgang des bistabilen Systems durch  $x(t) = cn_{+}(t) + (-c)n_{-}(t)$  ausgedrückt werden. Zur Berechnung der Kreuzkorrelationsfunktion  $C_0$  setzt man diesen Ausgang in die Definition von  $C_0$  ein (4.5) und erhält:

$$\begin{aligned} C_0 &= \max_{\tau_c} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt x(t) \cos(\omega(t - \tau_c)) \\ &= \frac{c\alpha_1\eta}{(\alpha_0^2 + \omega^2)^{1/2}} \max_{\tau_c} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \cos(\omega t - \phi) \cos(\omega(t - \tau_c)) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Die Maximierung des Integrals liegt genau dann vor, wenn die Argumente der Kosinusfunktionen übereinstimmen:  $\phi = \omega\tau_c$ , und man erhält als Lösung für die Kreuzkorrelationsfunktion eines Systems, das stochastische Resonanz zeigt:

$$C_0 = \frac{c\alpha_1\eta}{(\alpha_0^2 + \omega^2)^{1/2}} \quad (4.17)$$



$C_0$  hängt also sowohl von der rauschinduzierten Sprungrate  $\alpha_0$  als auch von der Kreisfrequenz der Modulation  $\omega$  ab. Darüber hinaus ist der Einfluss der Modulation auf die Sprungrate durch  $\alpha_1$  im Ergebnis enthalten. Damit gibt dieses Ergebnis der Ratengleichungsrechnung von McNamara und Wiesenfeld [55] die Frequenzabhängigkeit der stochastischen Resonanz richtig wieder.

### Schlussfolgerungen aus dem Ratengleichungsmodell

Die vorgestellte Herleitung ist aus zweierlei Hinsicht interessant:

- Setzt man in den Lösungsansatz der Übergangswahrscheinlichkeiten (4.13) ein beliebiges Signal  $s(t)$  ein, so kann analog zur vorgestellten Rechnung die stochastische Resonanz berechnet werden [36]. Bemerkenswert ist, dass stochastische Resonanz nicht nur bei periodischer Modulation auftritt, sondern auch aperiodische Signalformen übertragen werden können. Diese besondere Form der stochastischen Resonanz wird *aperiodische stochastische Resonanz* genannt und wurde erstmals von Collins et al. [57] beschrieben.
- Die Sprungrate  $\alpha_0$  und der Koeffizient  $\alpha_1$  wurden bislang als rauschinduziert eingeführt. Grundsätzlich kann diese Sprungrate aber von jedem anderen Zufallsprozess verursacht werden. In der Literatur gibt es zahlreiche Beispiele für stochastische Resonanz mit verschiedenen Rauschformen, wie z.B. farbigem Rauschen [1]. Darüber hinaus zeigen chaotische Systeme im Intermittenzbereich ebenso stochastische Resonanz, die als *rauschfreie stochastische Resonanz* [46] bezeichnet wird. Allgemein lässt sich sagen, dass, solange für die Sprungrate eine funktionale Abhängigkeit wie in (4.10) gefunden werden kann, die stochastischen Resonanz-Effekte sich im Rahmen der linearen Antworttheorie [55] beschreiben lassen.

Diese beiden Punkte werde ich im Folgenden näher erläutern. Dabei werde ich beim ersten Punkt sowohl auf die aperiodische stochastische Resonanz als auch näher auf den Verstärkungsmechanismus der stochastischen Resonanz in einem Doppelmuldenpotential eingehen. Dieses Modellsystem ist das am häufigsten studierte und für die Bewertung des stochastischen Modells vom Shinriki-Oszillator (vgl. Kapitel 5) wesentlich. Im Doppelmuldenpotential verursacht das Rauschen eine Sprungrate  $\alpha_0$ , die mit der Rauschstärke  $D$  monoton ansteigt. Dieses monotone Verhalten führt im Resonanzverhalten zu einem einzigen Maximum der stochastischen Resonanz. Bei der Diskussion des zweiten Punktes werde ich ein neuartiges Resonanzverhalten vorstellen, bei der die charakteristische Verstärkung durch stochastische Resonanz mehrere Male maximal wird. Diese *stochastische Multiresonanz* tritt in Systemen auf, deren Sprungrate nichtmonoton von der angelegten Rauschstärke abhängt.

### 4.3 Stochastische Resonanz im Doppelmuldenpotential

Im Großteil der bisherigen Arbeiten über die stochastische Resonanz wurde die lineare [1, 20, 55, 57, 58] und seit kurzem auch die nichtlineare Verstärkung [59, 60] verschiedener Signalformen  $s(t)$  untersucht. Dabei gehen die Autoren von einer rauschinduzierten Sprungrate aus, wie sie sich als Lösung eines stark gedämpften Teilchens im Doppelmuldenpotential ergibt. Die schwache Modulation mit der Amplitude  $A_m$  variiert dabei das statische Potential:

$$V(x_r, t) = -\frac{1}{2}ax_r^2 + \frac{1}{4}bx_r^4 + A_ms(t)x_r \quad a, b > 0. \quad (4.18)$$

Der stochastische Antrieb tritt als additive Größe in der Bewegungsgleichung des Teilchens auf:

$$m\ddot{x}_r(t) = -\gamma_r\dot{x}_r(t) + \frac{dV(x_r, t)}{dx_r} + \sqrt{D}\xi(t). \quad (4.19)$$

Wird die viskose Reibung  $\gamma_r$  als groß angenommen, kann diese Gleichung durch adiabatische Elimination in eine Langevin-Gleichung überführt werden [1]. Die Größen dieser Langevin-Gleichung sind dabei auf die viskose Reibung  $\gamma_r$  normiert. Im Grenzfall starker Dämpfung beschränkt sich die Dynamik der Bewegungsgleichung  $x(t)$  auf Werte nahe den beiden Potentialminima  $x_m = \pm\sqrt{a/b}$  und auf Sprünge zwischen den Zuständen. Zur Lösung des Problems mit zeitabhängigem Potential bietet sich ein störungstheoretischer Ansatz wie die vorgestellte Raten-gleichung an. Durch adiabatische Elimination ergibt sich aus Gl. (4.19) folgende Langevin-Gleichung:

$$\dot{x} = \frac{dV}{dx} + \sqrt{D}\xi(t). \quad (4.20)$$

Diese Gleichung beschreibt den Sprungprozess eines Teilchens über die Potentialbarriere  $\Delta V = \frac{a^2}{4b}$ . Die mittlere Sprungrate  $r$  dieses Prozesses wurde 1940 von Kramers gefunden [61] und wird daher auch Kramersrate  $r_K$  genannt. Sie kann zum Beispiel über eine der Bewegungsgleichung zugeordnete Fokker-Planck-Gleichung berechnet werden [12, 13] und zeigt den gleichen Verlauf wie die Sprungrate des Schmitt-Triggers (4.4):

$$r_K = \frac{\omega_0\omega_b}{2\pi} \exp\left(-\frac{2\Delta V}{D}\right) \quad (4.21)$$

Die Frequenzen  $\omega_{0,b}$  ergeben sich aus der Krümmung des Potentials an den Minima bei  $x_m = \pm\sqrt{a/b}$  bzw. am Maximum bei  $x_b = 0$  zu:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= |V''(x_m)| = 2a \\ \omega_b^2 &= |V''(x_b)| = a \end{aligned} \quad (4.22)$$

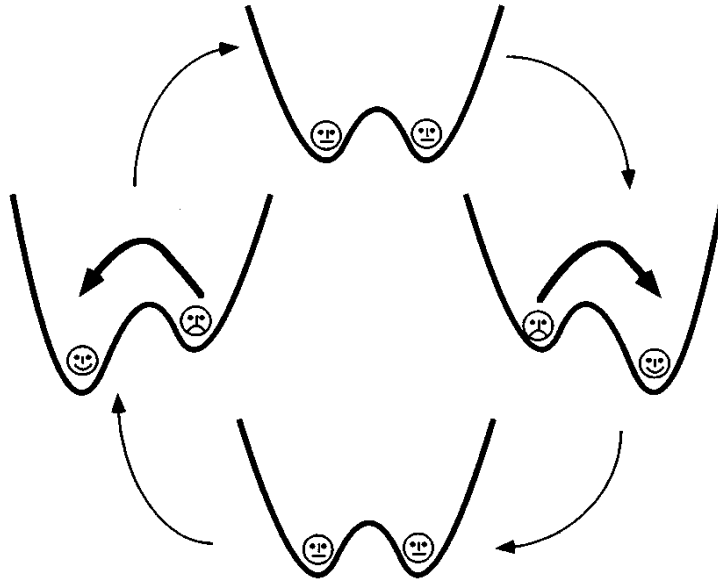


Abbildung 4.5: Schematische Darstellung der zeitlichen Modulation des Doppelmuldenpotentials während einer Periodendauer  $T_m$  des Modulationssignals, entnommen aus [1].

Diese Kramersrate (4.21) ist charakteristisch für eine Vielzahl von Nichtgleichgewichtsprozessen, deren Dynamik durch ein angekoppeltes Wärmebad, das eine stochastische Kraft erzeugt, bestimmt wird [20, 62].

Wesentlich für die stochastische Resonanz ist die Einkopplung der Modulation in das Potential (4.18). Sie führt auf eine zeitlich modulierte Sprungrate mit der normierten Modulationsamplitude  $\eta = 2A_m/D$ :

$$r_{\pm} = \frac{\omega_0 \omega_b}{2\pi} \exp \left( -\frac{2\Delta V}{D} \mp \eta s(t) \right) \quad (4.23)$$

Die Auswirkung der modulierten Übergangsrate lässt sich durch Abb. 4.5 verstehen: Dort ist das modulierte Doppelmuldenpotential dargestellt für eine Periodendauer der Modulation. Das unverkippte Potential oben und unten zeigt den Nulldurchgang der Modulation an. Bei verschwindender Modulation sind die Übergangswahrscheinlichkeiten für einen Sprung von rechts nach links oder umgekehrt gleich groß. Bei Verkipfung des Potentials, dessen Asymmetrie am stärksten bei den maximalen Auslenkungen der Modulation ist, werden Übergänge in der dargestellten Pfeilrichtung bevorzugt. Die Bevorzugung ist vom angehobenen ins abgesenkte Niveau gerichtet und die Wahrscheinlichkeit für einen Sprung steigt nach Gl. (4.23) exponentiell an. Sprünge in die Gegenrichtung sind dagegen deutlich unwahrscheinlicher als im ungestörten Potential. Im Idealfall maximaler Verstärkung verursachen die beiden entgegengesetzten Auslenkungen pro Periode jeweils einen Sprung von links

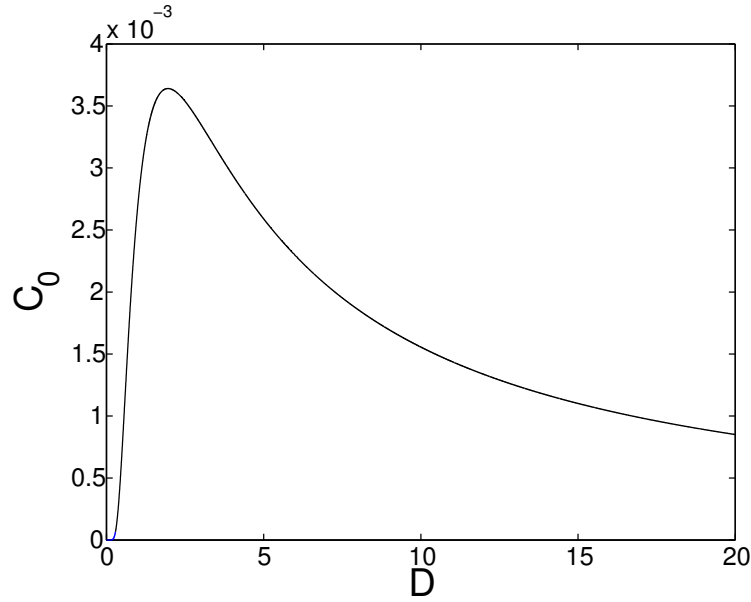


Abbildung 4.6: Die Kreuzkorrelationsfunktion  $C_0$  als Funktion der Rauschstärke. Dargestellt ist der theoretisch zu erwartende Verlauf, der sich aus der Ratengleichungsrechnung für ein Doppelmuldenpotential ergibt. Die gewählten Parameter sind:  $\Delta V = 2$ ,  $\omega = 25$ ,  $A_m = 0.2$ ,  $c = 1$ .

nach rechts und zurück. Auch für das Doppelmulden-Modell gilt die Zeitskalen-Relation (4.7), nach der dieser Idealfall von zwei Sprüngen pro Periode genau dann vorliegt, wenn die rauschinduzierte Sprungrate gerade dem Doppelten der Modulationsfrequenz entspricht.

Wie bereits angesprochen, eignet sich das Ratengleichungsmodell zur Berechnung der stochastischen Resonanz im zeitabhängigen Doppelmuldenpotential. Das resultierende Resonanzverhalten bei festgehaltener Modulationsamplitude und Modulationsfrequenz zeigt in Abhängigkeit von der Rauschstärke den typischen Verlauf mit einem Maximum, der bereits in der phänomenologischen Einführung zur stochastischen Resonanz das Ergebnis am Schmitt-Trigger kennzeichnete. Für dieses generische Resonanzverhalten ist die Kramersrate von besonderer Bedeutung, denn die einzigen veränderlichen Variablen  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  ergeben sich nach (4.12) zu  $2r_K$ . Damit folgt für die Kreuzkorrelation  $C_0$  bei sinusförmiger Modulation:

$$C_0 = \frac{c\eta\alpha_1}{\sqrt{\alpha_0^2 + \omega^2}} = \frac{2cA_m r_K}{D\sqrt{4r_K^2 + \omega^2}}, \quad (4.24)$$

deren graphischer Verlauf in Abb. 4.6 dargestellt ist.

## 4.4 Aperiodische stochastische Resonanz

In den letzten Jahren wurde viel über die Möglichkeit der technischen Anwendungen der stochastischen Resonanz diskutiert (siehe dazu die Beiträge des Workshops über “Stochastic resonance: New horizons in physics and engineering” am MPI für Physik komplexer Systeme [63]). Wesentlich für eine technische Anwendung der stochastischen Resonanz ist die Übermittlung von Signalen mit endlicher Bandbreite<sup>4</sup>. Sogar aperiodische Signale können durch Rauschen in nichtlinearen Systemen verstärkt und übertragen werden.

Einen Extremfall aperiodischer Modulation stellt ein bandbreitenbeschnittenes Rauschen dar. Für eine aperiodische Modulation dieser Art hat man als Signalform  $s(t)$  das Fourierintegral in Gl. (4.15) einsetzen und analog zur Rechnung in (4.16) die Kreuzkorrelationsfunktion  $C_0$  berechnen. Das Fourierintegral eines bandbreitenbeschnittenen Rauschens lautet in diesem Fall:

$$s(t) = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi\Omega}} \int_{-\Omega}^{\Omega} d\omega \sin(\omega t + \phi_{\omega}). \quad (4.25)$$

Dabei bezeichnet  $\sigma$  die Varianz und  $\Omega$  die Abschnidefrequenz des bandbreitenbeschnittenen Rauschens. Mit diesem Signal ergibt sich die Kreuzkorrelationsfunktion als:

$$C_0 = \frac{4c\eta_{\sigma}^2\alpha_1}{\Omega} \arctan\left(\frac{\Omega}{\alpha_0}\right). \quad (4.26)$$

$\eta_{\sigma}$  bezeichnet für stochastische Systeme die auf die Rauschstärke  $D$  normierte Stärke des aperiodischen Signals ( $\eta_{\sigma} = \sigma/D$ ).

Aus diesem Ergebnis folgt ein vergleichbarer Verlauf der Kreuzkorrelationsfunktion bei aperiodischer und periodischer Modulation (vgl. Gl. (4.17)). Die Ähnlichkeit resultiert aus folgenden Tatsachen:

- Beide Ergebnisse sind proportional zu  $\alpha_1$  und einer Funktion  $g(\alpha_0)$ .
- Obwohl die speziellen Funktionen  $g(\alpha_0)$  unterschiedlich sind, ist ihr asymptotisches Verhalten ähnlich: Für kleine Werte von  $\alpha_0$  sind sie nahezu konstant und für grosse Werte des Arguments fallen wie  $\alpha_0^{-1}$  ab.

Andererseits ist  $C_0$  bei aperiodischer Modulation proportional zum Quadrat der normierten Modulationsvarianz:  $C_0 \sim \eta_{\sigma}^2 = \sigma^2/D^2$ , wohingegen bei periodischer Modulation  $C_0 \sim \eta/D$  gilt (Gl. (4.17)). Bei Erhöhung der Rauschstärke  $D$  folgt daraus eine deutlich stärker Lokalisierung des Bereiches, in dem  $C_0 \neq 0$  ist.

---

<sup>4</sup>Eine einzelne Frequenz kann keine Information übertragen. Bereits An- und Abschaltevorgänge liefern ein Spektrum mit einer Bandbreite  $> 0$ .

## 4.5 Rauschfreie stochastische Resonanz und Multi-resonanz

Das Phänomen der stochastischen Resonanz wurde seit seiner Entdeckung 1981 von Benzi et al. [6] mehrfach erweitert. Eine der einfachsten Varianten ist das Einkoppeln einer chaotischen Zeitreihe anstelle des Rauschens [64, 65]:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= x - x^3 + A_m \cos(\omega t) + \kappa y_1 \\
 \dot{y}_1 &= \frac{\sigma}{\epsilon}(y_2 - y_1) \\
 \dot{y}_2 &= \frac{1}{\epsilon}(ry_1 - y_1 y_3 - y_2) \\
 \dot{y}_3 &= \frac{1}{\epsilon}(y_1 y_2 - by_3)
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Die obere Gleichung entspricht der Langevin-Gleichung mit zeitlich moduliertem Potential (vgl. Gl. (4.20)). Anstelle des Gauß'schen weißen Rauschens wird hier die erste Komponente eines Lorenz-Systems mit den „Standard-Parametern“  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$ ,  $b = 8/3$  eingekoppelt. Desweiteren kann über den Parameter  $\kappa$  die Stärke der chaotischen Anregung variiert werden. Wichtig ist der Parameter  $0 < \epsilon \ll 1$ , der zu einer Zeitskalenseparation zwischen der Dynamik der Langevin-Gleichung und der Dynamik des Lorenz-Systems führt. In diesem Gleichungssystem besteht keinerlei Rückwirkung von der langsamen Dynamik der Langevin-Gleichung auf die schnelle chaotische Dynamik. Damit bewirkt die chaotische Dynamik eine Sprungdynamik zwischen den Mulden, die für genügend kleine Werte von  $\epsilon$  als zufällig erscheint. Es erstaunt daher nicht, dass Just et al. [65] in diesem Gleichungssystem eine Form der stochastischen Resonanz finden (vgl. Abb. 4.7), die sich kaum von der in stochastischen Systemen gefundenen unterscheidet.

Eine andere Form stochastischer Resonanz ohne Rauschens ist die rauschfreie stochastische Resonanz, die anstelle rauschinduzierter Sprünge die zufällige Sprungdynamik eines Intermittenzszenariums benutzt. Bereits 1991 präsentierten Anishchenko [8] und Nicolis [66] die rauschfreie stochastischen Resonanz an chaotischen Systemen. Anstelle des statischen Doppelmuldenpotentials tritt bei der rauschfreien stochastischen Resonanz ein dynamisches Potential, das durch die chaotische Dynamik generiert wird. Die Grundidee der rauschfreien stochastischen Resonanz kann folgendermassen zusammengefasst werden:

Wie im vorherigen Kapitel gezeigt, ist die mittlere Sprungrate  $r = \langle \tau \rangle^{-1}$  im Intermittenzbereich durch die Differenz zwischen dem aktuellen und kritischem Kontrollparameterwert bestimmt:  $r = f(\Delta p)$ . Eine zusätzliche Modulation  $\eta s(t)$  ( $\eta = A_m / \Delta p$ ) im chaotischen System kann dazu führen, dass die Sprungrate  $r$  zeitlich moduliert wird. Diese Sprungrate  $r(t) = f(\Delta p + \eta s(t))$  ist vergleichbar mit der zeitlich modulierten Kramersrate in Gl. (4.23). Wie gezeigt, führt die zeitlich modulierte Kramersrate zu stochastischer Resonanz. Deshalb erstaunt es nicht,

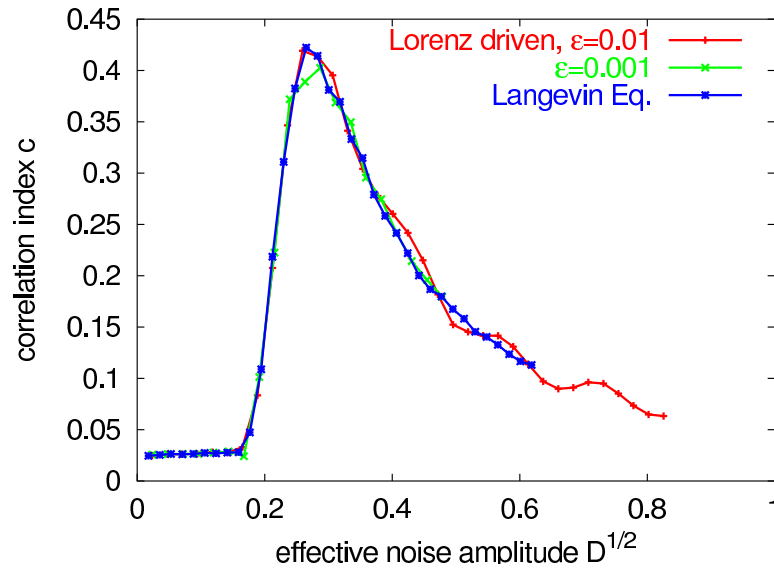


Abbildung 4.7: Vergleich zwischen dem Verlauf von  $C_0$  für einen stochastischen (blaue Kurve) und einen chaotischen Antrieb mit  $\epsilon = 0.01$  (rote Kurve) bzw. 0.001 (grüne Kurve): In beiden Fällen zeigt sich für  $A_m = 0.1$  und  $\omega = 0.001$  stochastische Resonanz. Die angegebene Rauschstärke  $D^{1/2}$  ist für den chaotischen Antrieb proportional zu  $\sqrt{\epsilon\kappa}$  [65]. Darstellung entnommen aus [67].

dass chaotische Systeme, deren Sprungrate im Intermittenzbereich zeitlich moduliert werden, ebenso stochastische Resonanz zeigen.

In der Tat wurde diese Synchronisation der Sprünge zwischen den dynamischen Zuständen eines Intermittenzszenariums mittlerweile nicht nur numerisch an einer Vielzahl von unterschiedlichen Intermittenzarten gefunden [8, 68], sondern auch experimentell bestätigt [46, 69]. Die maximale Verstärkung der schwachen Modulation tritt in den rauschfreien Systemen bei einem optimalen Kontrollparameter  $\Delta p_o$  auf. Der Wert von  $\Delta p_o$  hängt dabei von der gewählten Modulationsfrequenz ab, auch wenn die rauschfreie stochastische Resonanz – wegen der geringen intrinsischen Dämpfung – nicht eine einfache Zeitskalenrelation wie (4.7) zeigt. Aufgrund der eingeschränkten Zeitskala der Intermittenz ist außerdem die Modulationsfrequenz nicht frei wählbar. Anders als bei rauschinduzierter stochastischer Resonanz können daher nicht beliebige Frequenzen durch die rauschfreie stochastische Resonanz übertragen werden. Wählt man jedoch die Modulationsperiode so aus, dass sie im Zeitskalenbereich der intermittenten Sprungdynamik liegt, kann im Allgemeinen mit einer Verstärkung gerechnet werden.

Die rauschfreie stochastische Resonanz kann man in zwei Klassen einteilen:

- Systeme mit Pomeau-Manneville- [24] oder On-Off-Intermittenz [30] zeigen das normale Resonanzverhalten mit einem Maximum der Verstärkung beim optimalen Kontrollparameter  $\Delta p_o$  [46, 68].

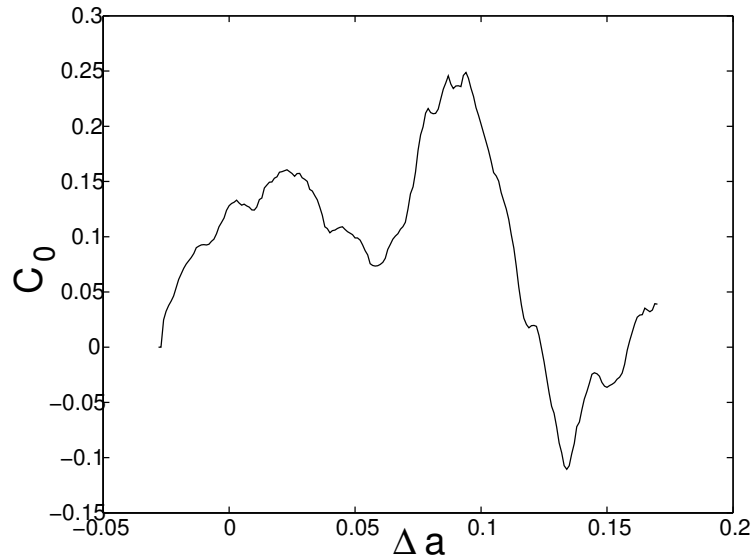


Abbildung 4.8: Rauschfreie stochastische Multiresonanz an der kubischen Abbildung (4.28): Es zeigen sich zwei Verstärkungsmaxima mit positiver Korrelation bei  $\Delta a_1 \approx 0.025$  und  $\Delta a_2 \approx 0.1$  und eines mit negativer Korrelation bei  $\Delta a_3 \approx 0.125$ .

- Im Falle von kriseninduzierter Intermittenz, z.B. bei einer Verschmelzkrise, werden häufig mehrere Maxima bei unterschiedlichen Kontrollparameterwerten  $\Delta p_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , in der Kreuzkorrelation beobachtet. Dieses spezielle Resonanzverhalten haben wir *rauschfreie stochastische Multiresonanz* genannt.

Als Beispiel für rauschfreie stochastische Multiresonanz dient das Resonanzverhalten der kubischen Abbildung (3.12). Für die Untersuchung der stochastischen Resonanz wird die Modulation in die Abbildung einbezogen:

$$x_{n+1} = (a - 1)x_n - ax_n^3 + A_m \cos(\omega_m n) \quad (4.28)$$

Diese Abbildung besitzt für  $a > a_c$  zwei verschmolzene Subattraktoren, zwischen denen das System intermittent hin und her springt. Diese beiden Subattraktoren werden als dynamische Bistabilität verstanden. Wie im Doppelmuldenbild der stochastischen Resonanz (vgl. Abb. 4.5) sorgt die eingekoppelte Modulation in (4.28) dafür, dass einer der beiden dynamischen Zustände während einer halben Periodendauer der Modulation bevorzugt angesprungen wird. Im Doppelmuldenbild könnte man sagen, dass der eine dynamische Zustand gegen den anderen abgesenkt ist. Betrachtet man aber das Ergebnis einer numerischen Simulation der kubischen Abbildung mit Modulation (4.28), wird ein deutlicher Unterschied sichtbar: Abb. 4.8 zeigt die Kreuzkorrelationsfunktion  $C_0$  in Abhängigkeit von  $\Delta a$ , wie sie sich aus einem numerischen Experiment mit  $A_m = 0.01$  und  $\omega_m = 0.2 \cdot 2\pi$  nach jeweils 100000 Iterationsschritten ergibt. Anstelle des üblichen Verlaufs mit nur einem Maximum zeigt  $C_0$  zwei Maxima mit positiver Korrelation und ein Minimum mit nega-



tiver Korrelation. Spektrale Maße würden aufgrund des Verlustes der Phaseninformation drei Maxima zeigen<sup>5</sup>, weshalb man von drei Verstärkungsmaxima sprechen kann.

Um die stochastische Multiresonanz zu verstehen, muss man nochmals die Herleitung der Kreuzkorrelation aus dem Ratengleichungsmodell betrachten. Die Entwicklungskoeffizienten  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  berechnen sich nach Gl. (4.12) aus der ungestörten Rate und der Ableitung der Rate nach der Modulationsamplitude  $\eta$ . Für die stochastische Resonanz im Doppelmuldensystem ergibt sich für die beiden Entwicklungskoeffizienten  $\alpha_0 = \alpha_1 = 2r_k$ . Diese Übereinstimmung der Koeffizienten rührt vom speziellen Verlauf der Sprungrate  $r_k$  (4.21) her. Bei allen Systemen, die gewöhnliche stochastische Resonanz mit einem Maximum zeigen, sind  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  monotone Funktionen der Rauschintensität. Für die rauschfreie SR an der kubischen Abbildung hingegen ist die Sprungrate  $r = \langle \tau \rangle^{-1}$  keine monotone Funktion des Kontrollparameters  $\Delta a$  (vgl. Abb. 3.12) und somit ist zwar  $\alpha_0 = 2r$ , aber  $\alpha_1 \neq \alpha_0$ .

In [10, 11] wurde gezeigt, dass ein nicht-monotones Verhalten der Sprungrate  $r$ , das bei kriseninduzierter Intermittenz auftritt, zu mehreren Verstärkungsmaxima der rauschfreien stochastischen Resonanz führt<sup>6</sup>. Insbesondere schlagen Krawiecki et al. [11] eine Berechnung von  $\alpha_1$  aus dem bekannten Verlauf der Sprungrate  $r$  vor:

$$\alpha_1 = \frac{r(\Delta p - \eta) - r(\Delta p + \eta)}{2\eta}. \quad (4.29)$$

Hierbei ist  $\Delta p$  der Kontrollparameter,  $\eta$  die auf  $\Delta p$  normierte Modulationsamplitude  $A_m$  und  $r(\Delta p \pm \eta)$  die Sprungrate bei den Kontrollparameterwerten  $\Delta p \pm \eta$ . Setzt man diese Näherung in das Ergebnis der analytischen Rechnung für die Kreuzkorrelation (4.17) ein, so ergibt sich:

$$C_0 = \frac{c\eta\alpha_1}{\sqrt{\alpha_0^2 + \omega^2}} = \frac{2cA_m\alpha_1}{\Delta p\sqrt{\alpha_0^2 + \omega^2}} \approx \frac{c(r(\Delta p - \eta) - r(\Delta p + \eta))}{\sqrt{\alpha_0^2 + \omega^2}} \quad (4.30)$$

Diese Näherung für  $\alpha_1$  ist allerdings nur dann anwendbar, wenn die Modulationsamplitude  $A_m$  sehr klein ist. Für die vorgestellte stochastische Multiresonanz der kubischen Abbildung führt sie zu keinerlei Übereinstimmung mit den numerisch gewonnenen Daten. Es zeigt sich aber, dass diese Methode durchaus zu guter Übereinstimmung zwischen dem erwarteten Verlauf von  $C_0$  und den experimentellen Daten des Shinriki-Systems führt.

<sup>5</sup>Nach dem Wiener-Khinchine-Theorem [27] gilt in symmetrischen bistabilen Systemen zwischen  $C_0$  und den üblicherweise benutzten spektralen Maßen folgender Zusammenhang: *Spektrale Leistungsverstärkung* [1]:  $SPA \sim C_0^2$  und *Signal- Rauschverhältnis*:  $SNR \sim |C_0|$ .

<sup>6</sup>Neben den wenigen Beispielen von stochastischer Multiresonanz an chaotischen Systemen wurde dieses spezielle Form der stochastischen Resonanz auch in rein stochastischen Systemen gefunden. Siehe hierzu [9, 70] und Anhang B. Die beiden Beispiele aus dem Bereich der stochastischen Dynamik zeichnen sich in gleichem Maße durch eine nichtmonotone Abhängigkeit zwischen der Sprungrate und der Rauschintensität aus, weshalb man von einem universellen Mechanismus sprechen kann, der zur stochastischen Multiresonanz führt



## Kapitel 5

# Stochastische Resonanz am Shinriki-Oszillator

Stochastische Resonanz kann am Shinriki-Oszillator an beiden verschiedenen Arten von Krisen untersucht werden: an der rauschinduzierten Krise, bei der ein unterkritischer Kontrollparameter  $R < R_c$  mit konstantem Wert gewählt wird und die mittlere Verweildauer  $\langle \tau \rangle$  durch die Rauschintensität  $D$  variiert wird, und an der Verschmelzkrise, bei der der Kontrollparameter  $R$  variabel ist und die Sprunghäufigkeit durch den Wert von  $\Delta R$  bestimmt ist. Zur besseren Unterscheidung der beiden Krisen werde ich die letztere immer als Verschmelzkrise bezeichnen.

Dabei ist die stochastische Resonanz an der Verschmelzkrise besonders interessant, weil mehrere Verstärkungsmaxima auftreten. Neben der stochastischen Resonanz mit rein sinusförmiger Modulation werde ich auch die stochastische Resonanz mit aperiodischer Modulation an der Verschmelzkrise vorstellen.

### 5.1 Stochastische Resonanz an der rauschinduzierten Krise

Zur Untersuchung der stochastischen Resonanz an der rauschinduzierten Krise wurde ein Kontrollparameterwert von  $\Delta R \approx -1\text{k}\Omega$  gewählt. Im Gegensatz zur Untersuchung der verrauschten Krise lag an dem Schwingkreis neben dem stochastischen Antrieb (Funktionsgenerator Wavetek 395) – der die Verschmelzkrise verursacht – eine sinusförmige Modulationssignal an (Funktionsgenerator HP8116A). Als Bandbreite des stochastischen Signals wurde 0.1Hz-60kHz verwendet. Bei konstantem Wert von  $\Delta R$  wurde die Rauschstärke  $\sqrt{D}$  in 50mV Schritten von 0 auf 5V erhöht. Ergebnisse dieser Messung sind in Abb. 5.1 dargestellt. Die Resonanzkurven wurden für die Modulationsfrequenz von 20Hz bzw. 30Hz und die Modulationsamplitude von 300mV bzw. 500mV gemessen. Die maximale Verstärkung tritt für die höhere Modulationsfrequenz bei etwas höheren Rauschstärken ein, was die Zeitskalenrelation von Gl. (4.7) widerspiegelt. Die stochastische Resonanz an der

rauschinduzierten Krise ist von einem einzelnen Maximum der Kreuzkorrelationsfunktion geprägt. Damit ist das Resonanzverhalten im Einklang mit früheren numerischen Untersuchungen zur stochastischen Resonanz an einer rauschinduzierten Krise im Lorenz-System [20].

Dieses Verhalten, das der gewöhnlichen stochastischen Resonanz an stochastischen Systemen mit Doppelmuldenpotential entspricht, ist nicht weiter verwunderlich. Bei einer rauschinduzierten Krise sind die Zustände zwar dynamisch und werden von der schnellen chaotischen Dynamik generiert, die Sprünge sind aber rauschinduziert. Dies führt zu einem  $\langle \tau \rangle$ , das monoton abfällt, wenn  $D$  erhöht wird (vgl. Abb. 3.22). Aus diesem Verlauf folgt, dass der Entwicklungsparameter  $\alpha_0 = 2 \langle \tau \rangle^{-1} \sim 2D^\gamma$  mit zunehmender Rauschstärke monoton anwächst, wohingegen  $\alpha_1 \sim 2/D^{1-\gamma}$  mit zunehmender Rauschstärke monoton abfällt. Aus diesem monotonen Verhalten von  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  ergibt sich der typische Verlauf von  $C_1$  mit einem einzigen Maximum.

In gewisser Weise bildet dieses Experiment mit seinem gewöhnlichen Resonanzverhalten ein Gegenstück zu den weiter oben vorgestellten Untersuchungen von Just et al.: Während dort in einem Doppelmuldenpotential die Verstärkung eines periodischen Signals durch stochastische Resonanz als Funktion der Stärke des eingekoppelten chaotischen Signals beobachtet werden konnte, verursacht in diesem Fall die chaotische Dynamik die Zustände, und die Synchronisation der rauschinduzierten Sprünge führt zu stochastischer Resonanz.

## 5.2 Stochastische Resonanz an der Verschmelzkrise

Für die Untersuchungen der stochastischen Resonanz und der aperiodischen stochastischen Resonanz wurde der Kontrollparameter  $\Delta R$  von  $-5\text{k}\Omega$  auf  $20\text{k}\Omega$  in  $50\Omega$ -Schritten erhöht. Aus der gefilterten  $V_1$ -Zeitreihe und der anliegenden Modulation, die sowohl bei periodischer als auch aperiodischer Modulation vom Funktionsgenerator Wavetek 395 erzeugt wurde, konnte die Kreuzkorrelationsfunktion berechnet werden. Da die Kreuzkorrelationsfunktion im Gegensatz zu spektralen Maßen auch für aperiodische Signalformen verwendet werden kann, konnte die Berechnung der Kreuzkorrelationsfunktion aus den Zeitreihen in beiden Fällen mit dem selben Programm durchgeführt werden.

Zunächst möchte ich die Ergebnisse für eine sinusförmige Modulation vorstellen. Wie bei den Messungen der stochastischen Resonanz an der rauschinduzierten Krise, wurde das Resonanzverhalten für zwei unterschiedliche Frequenzen (20 und 30Hz) und verschiedene Modulationsamplituden getestet. In Abb. 5.2 ist die resultierende Kreuzkorrelationsfunktion  $C_1$  in Abhängigkeit vom Kontrollparameter  $\Delta R$  dargestellt. Bei beiden Modulationsfrequenzen zeigt die Kreuzkorrelationsfunktion mehrere Extrema und damit stochastische Multiresonanz. Betrachtet man das erste Maximum der stochastischen Multiresonanz, so verschiebt sich dieses bei einer Modulationsamplitude von 50mV (Abb. 5.2, obere Reihe) für die höhere Modula-

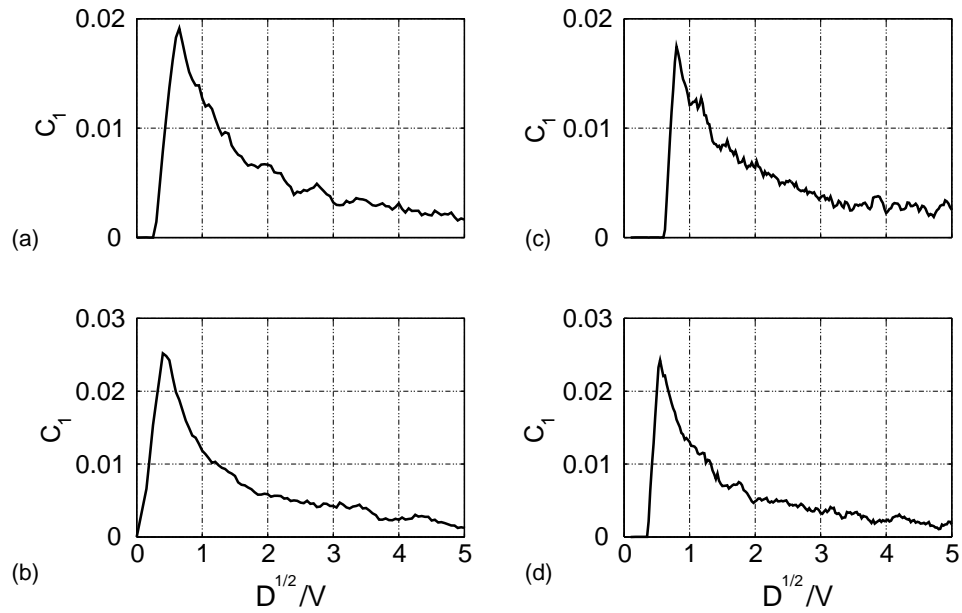


Abbildung 5.1: Stochastische Resonanz an der rauschinduzierten Krise des Shinriki-Oszillators: Kreuzkorrelationsfunktion  $C_1$  für zwei Modulationsfrequenzen: (a,b) 20Hz, (c,d) 30Hz und zwei Modulationsamplituden: (a,c) 300mV und (b,d) 500mV.

tionsfrequenz um ungefähr  $0.5\text{k}\Omega$ . Diese Verschiebung demonstriert die Frequenzabhängigkeit der Verstärkung, die im analytischen Ergebnis der Kreuzkorrelationsfunktion (4.30) durch den Term  $\sqrt{\alpha_0^2 + \omega^2}$  auftritt.

Die Messdaten der stochastische Multiresonanz zeigt bei beiden Modulationsfrequenzen eine deutliche Veränderung, wenn die Modulationsamplitude erhöht wird. Während bei niedrigen Modulationsamplituden eine große Anzahl von Extremwerten von  $C_1$  auftritt, nimmt diese Anzahl für höhere Modulationsamplituden ab, und die Peaks werden breiter. Für die höchste dargestellte Modulationsamplitude von 200mV (Abb. 5.2, untere Reihe) ist kaum noch ein Anzeichen für stochastische Multiresonanz erkennbar.

Dieser Übergang von vielen Verstärkungsmaxima hin zu nur einem Maximum spiegelt die Wechselwirkung zwischen der Modulation und der nichtmonotonen Abhängigkeit von  $\langle\tau\rangle$  und  $\Delta R$  wieder, die sich in  $\alpha_1$  niederschlägt. Betrachten wir die Näherungsformel zur Berechnung von  $\alpha_1$  in (4.29), so wird deutlich, dass bei kleinen Modulationsamplituden auch kleinere Variationen von  $\langle\tau\rangle$  für eine starke Veränderung von  $\alpha_1$  sorgen und folglich das resultierende Resonanzverhalten eine große Anzahl von Verstärkungsmaxima besitzt. Für große Modulationsamplituden hingegen sehen wir im Experiment den Trend von  $\langle\tau\rangle$  auf großen Skalen: ein Skalierungsverhalten, das im Wesentlichen von langen Verweildauern zu kurzen abfällt. In diesem Sinne ermöglichen stochastische Resonanz-Experimente bei unbekanntem

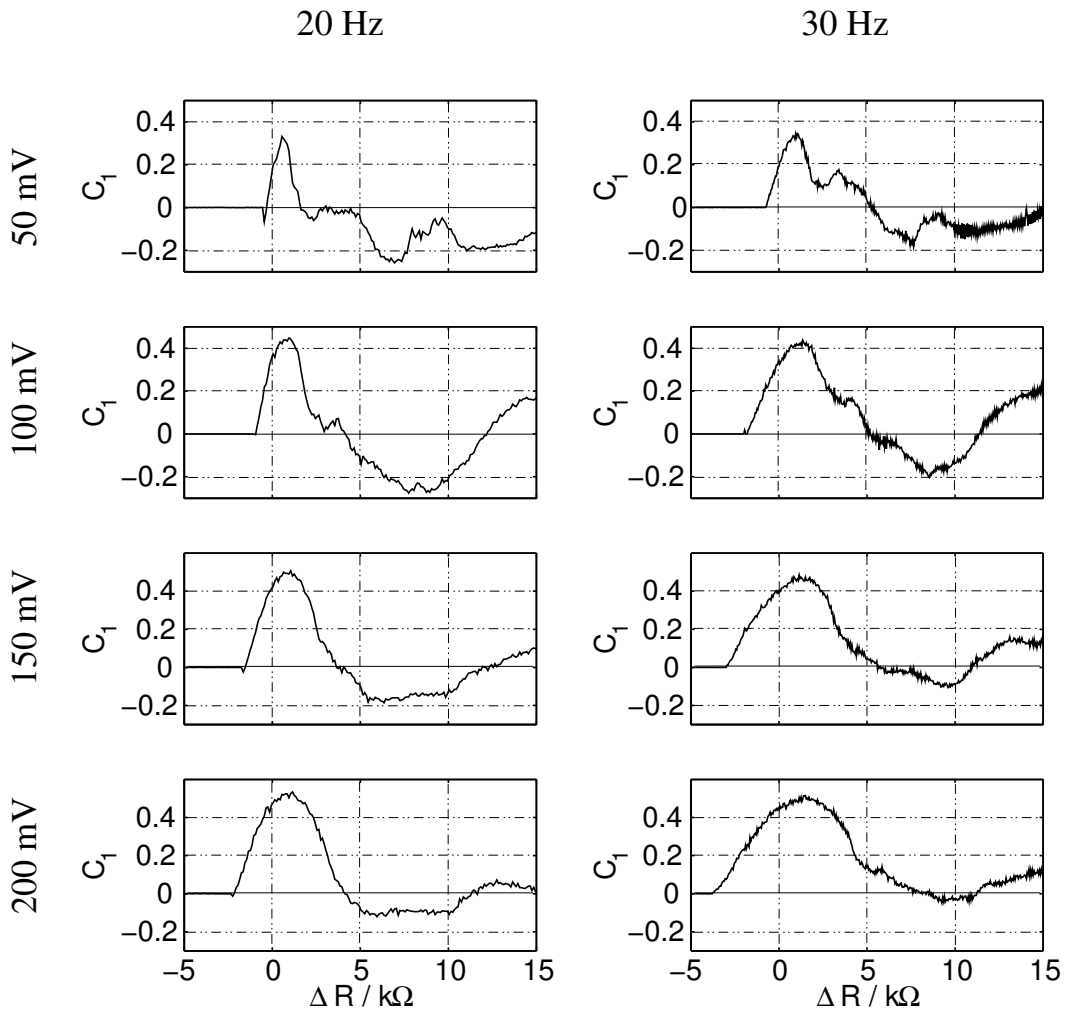


Abbildung 5.2: Stochastische Multiresonanz an der Verschmelzkrise des Shinriki-Schwingkreises: Kreuzkorrelation  $C_1$  dargestellt in Abhängigkeit von  $\Delta R$ .

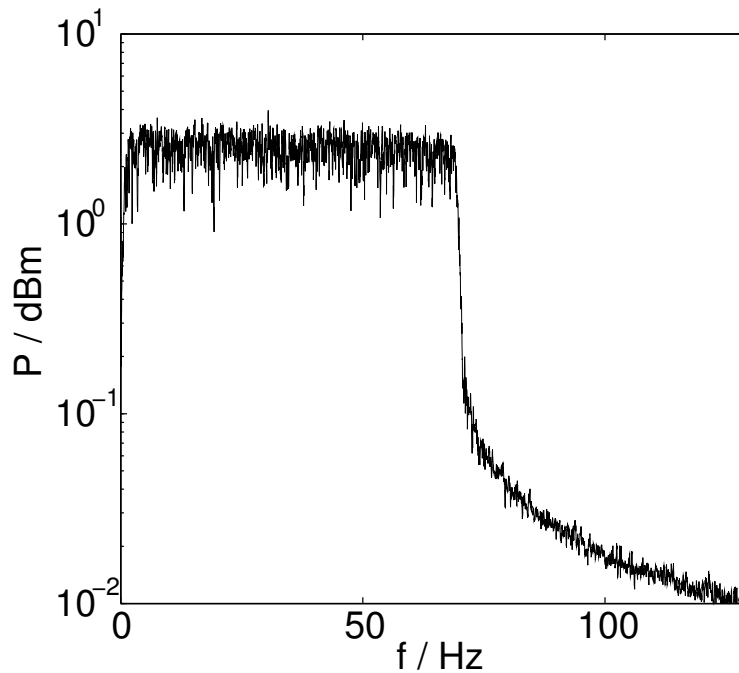


Abbildung 5.3: Spektrum des aperiodischen Signals, das für die Experimente zur aperiodischen stochastischen Resonanz am Shinriki-Oszillator verwendet wurde. Die Modulation hat eine Bandbreite von 0.1-70Hz.

Zusammenhang zwischen  $\langle \tau \rangle$  und  $\Delta R$  eine Aussage über die Größe der Variationen die den generellen Trend überlagern.

Um zu demonstrieren, dass der Shinriki-Oszillator auch aperiodische Signale übertragen kann und so rauschfreie aperiodische stochastische Resonanz zeigt, wurde das Resonanzverhalten des Schwingkreises bei einer Modulation mit bandbreitenbeschnittenem Rauschen untersucht. In Abb. 5.3 ist das Leistungsspektrum dieses Signals dargestellt. Die Bandbreite der aperiodischen Modulation beträgt 0.1 – 70Hz und erfüllt mit der klar erkennbaren Abschneidefrequenz bei 70Hz gut die Anforderungen von Gl. (4.25).

Abb. 5.4 zeigt das Ergebnis der Untersuchungen. Die Kreuzkorrelationsfunktion  $C_1$  hat mehrere Extremwerte. Daraus folgt, dass der Shinriki-Oszillator nicht nur rauschfreie aperiodische stochastische Resonanz zeigt sondern auch rauschfreie aperiodische stochastische Multiresonanz. Die drei  $C_1$ -Kurven zeigen für die verschiedenen Modulationsstärken zwischen 90mV und 630mV eine ähnliche Entwicklung, wie sie bei periodischer Modulation gefunden wurde: Eine Erhöhung der Modulationsstärke äußert in einer Verbreiterung des ersten Maximums und dem Verschwinden kleinerer Strukturen. Diese Ähnlichkeit des stochastischen Resonanz-Phänomens bei periodischer und aperiodischer Modulation spiegelt die Ähnlichkeit der Lösungen von Gl. (4.17) und Gl. (4.26) wieder.

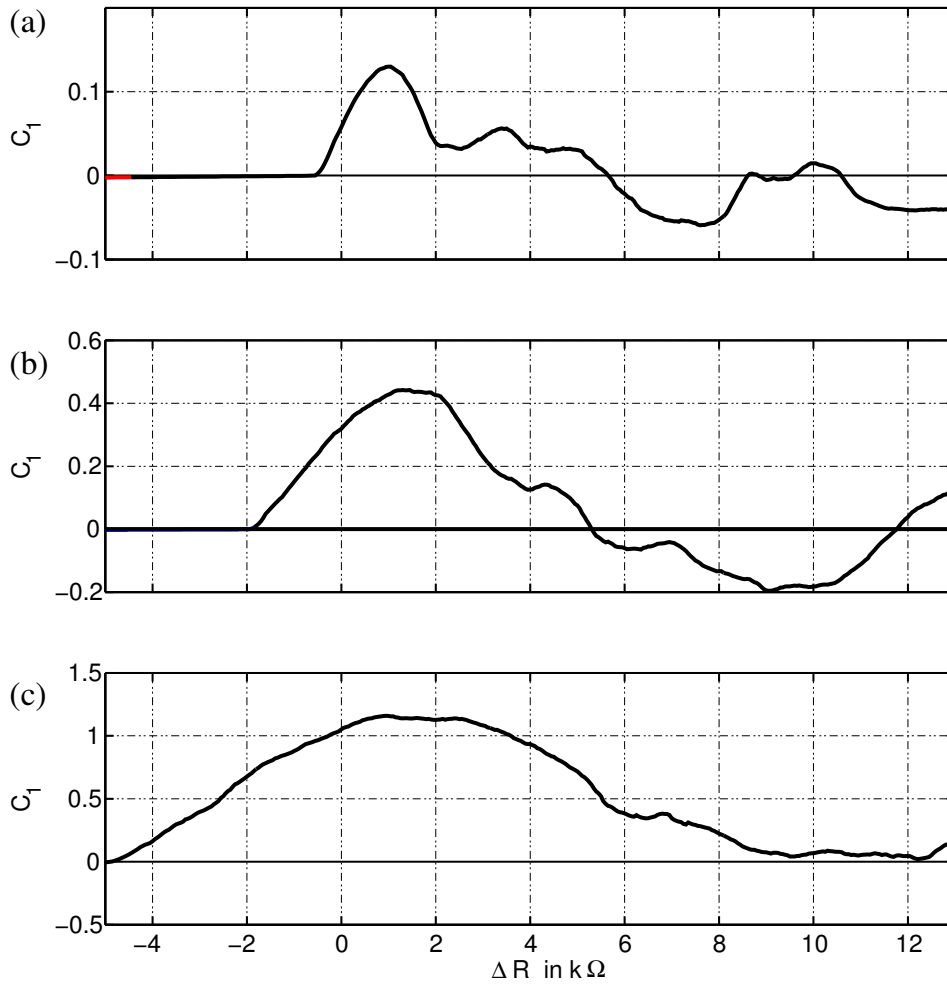


Abbildung 5.4: Rauschfreie aperiodische stochastische Multiresonanz gemessen am Shinriki-Oszillator: Kreuzkorrelationsfunktion  $C_1$  für eine Modulationsbandbreite von 0.1 – 70Hz und Modulationsamplituden  $\sigma$  von (a) 90mV, (b) 220mV und (c) 630mV.



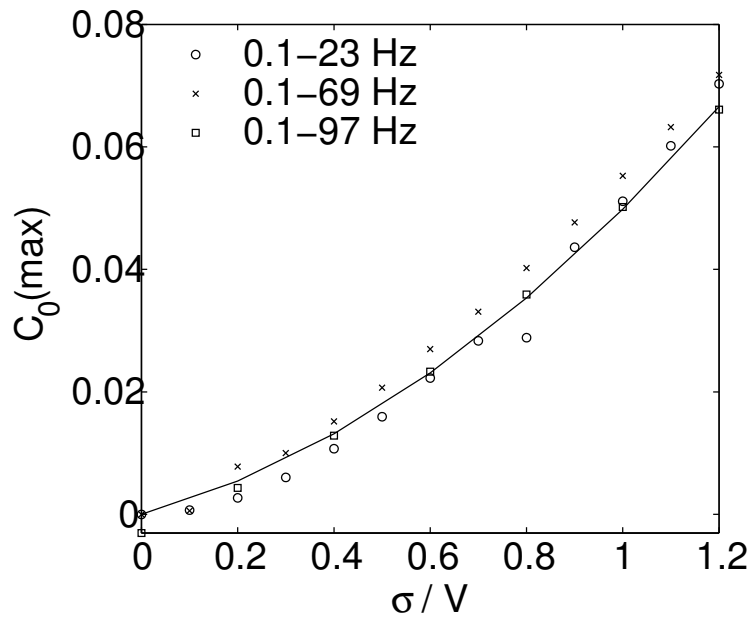


Abbildung 5.5: Abhängigkeit des Maximalwertes der nicht normierten Kreuzkorrelation beim ersten Maximum von der angelegten Modulationsvarianz  $\sigma$ . Wie aus (4.26) zu erwarten, ergibt sich eine quadratische Abhängigkeit, die durch die durchgezogene Linie angedeutet ist.

Zur genaueren Untersuchung, ob die gemessene Kreuzkorrelationsfunktion Gl. (4.26) erfüllt, wurde der quadratische Zusammenhang zwischen  $C_0$  und der Modulationsvarianz  $\sigma$  überprüft. Dabei wurde der Maximalwert von  $C_0$  beim ersten Maximum für unterschiedliche Modulationsamplituden  $\sigma$  vermessen. Im Gegensatz zu den bisherigen Messungen, wurden zwei weitere Modulationsbandbreiten von 0,1 – 23Hz und 0,1 – 97Hz benutzt. Die Ergebnisse zeigen, dass der Maximalwert von  $C_0$  trotz der unterschiedlichen Modulationsfrequenzen und -amplituden nahezu beim gleichen Kontrollparameterwert auftritt. Daher konnte auf eine zusätzliche Umrechnung von  $\sigma$  auf die normierte Amplitude  $\eta_\sigma$  verzichtet werden. In Abb. 5.5 ist der gemessene Zusammenhang zwischen  $C_0$  und  $\sigma$  für die drei Bandbreiten dargestellt. In guter Übereinstimmung mit dem Ergebnis der analytischen Rechnung kann bei allen Modulationsbandbreiten ein quadratischer Zusammenhang zwischen dem Maximalwert von  $C_0$  am ersten Maximum und der Modulationsvarianz  $\sigma$  nachgewiesen werden.

Die dargestellten Untersuchungen der rauschfreien stochastischen Resonanz am Shinriki-Oszillator stellen nur einen kleinen Bruchteil der Ergebnisse dar. Wesentliche Details zur aperiodischen stochastischen Resonanz finden sich in der Diplomarbeit von J. Werner [36], die ich mitbetreut habe. In dieser Arbeit konnte er mit Hilfe von Informationsmaßen – z. B. der „gegenseitigen Information“ (*mutual information*) [71] und der „Transinformation“ [72] – zeigen, dass bei aperiodischer di-

chotomer Modulation tatsächlich ein Informationstransfer durch stochastische Resonanz stattfindet. Dieses Ergebnis ist von großer Wichtigkeit für die tatsächliche Anwendung, zeigt es doch, dass die auftretenden Maxima der Verstärkung nicht aufgrund zufälliger Ähnlichkeiten von Modulation und Systemantwort zustande kommen, sondern ein kausaler Zusammenhang zwischen der Modulation und der Antwort besteht, der die Maxima verursacht.

### 5.3 Vergleich mit linearer Antworttheorie

Abschliessend möchte ich die experimentellen Ergebnisse mit den Vorhersagen der analytischen Rechnung vergleichen. Ich beschränke mich dabei auf die rauschfreie stochastische Multiresonanz bei periodischer Modulation. Für den Vergleich wurden die Parameter  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  bestimmt und die zu erwartende Kreuzkorrelation  $C_0$  nach Gl. (4.30) berechnet. Bei der Berechnung von  $\alpha_1$  muss berücksichtigt werden, dass die Auswirkung der Modulation bei Erhöhung von  $\Delta R$  nach (2.3) größer wird. Dieses Anwachsen des Ersatzwiderstandes  $R_{mod}$  schlägt sich direkt in einem Anwachsen des Intervalls  $\Delta R \pm R_{mod}$  nieder, durch das  $\alpha_1$  nach Gl. (4.29) bestimmt werden kann. Dadurch nimmt der Einfluss von kleinen Variationen in der Sprungrate auf  $\alpha_1$  für große Kontrollparameterwerte  $\Delta R$  ab.

Um den Einfluss der Modulationsspannung nach (2.3) richtig zu berechnen, wurde zunächst  $R_c$  ohne Modulation bestimmt. Darauf wurde für unterschiedliche Modulationsamplituden der Kontrollparameterwert  $R_{c'}$  ermittelt, bei dem sich im Shinriki-Oszillator die ersten Sprünge zwischen den Subattraktoren zeigen. Aus der Differenz von  $R_c - R_{c'}$  ergibt sich die Größe des Ersatzwiderstandes  $R_{mod}$  der Modulation. Durch diese Messungen ergibt sich für kleine Modulationsamplituden  $V_{mod}$  folgende Umrechnungsformel, die in der Nähe von  $R_c$  gilt:

$$R_{mod}(R_c) = a \cdot V_{mod} \quad \text{mit} \quad a \approx 8 \frac{\text{k}\Omega}{V} \quad (5.1)$$

Vergleicht man diese Näherungsformel mit Gl. (2.3) für den Ersatzwiderstand so erhält man für den gesamten Intermittenzbereich folgende Umrechnungsvorschrift:

$$R_{mod} = a \cdot V_{mod} \left( 1 + \frac{\Delta R}{R_c} \right) \quad (5.2)$$

Bei der Bestimmung von  $C_0$  aus der gemessenen mittleren Verweildauer  $\langle \tau \rangle$  zeigen sich sehr ausgeprägte Maxima der Verstärkung [36], die durch die beiden periodischen Fenster hervorgerufen werden (vgl. Abb. 3.19). Die großen Sprünge von  $\tau$  bei den Fenstern, die insbesondere in den Parameter  $\alpha_1$  einfließen, verursachen diese Maxima. Die isolierten Maxima treten in den gemessenen Resonanzkurven nicht auf, allerdings zeigen sich die periodischen Fenster auch nicht im Phasenraum, wenn eine Modulation angelegt wird. Um die Diskrepanz zwischen der Vorhersage der linearen Antworttheorie und den Messdaten zu vermeiden, wurden  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  mit Hilfe einer weiteren Messung bestimmt.

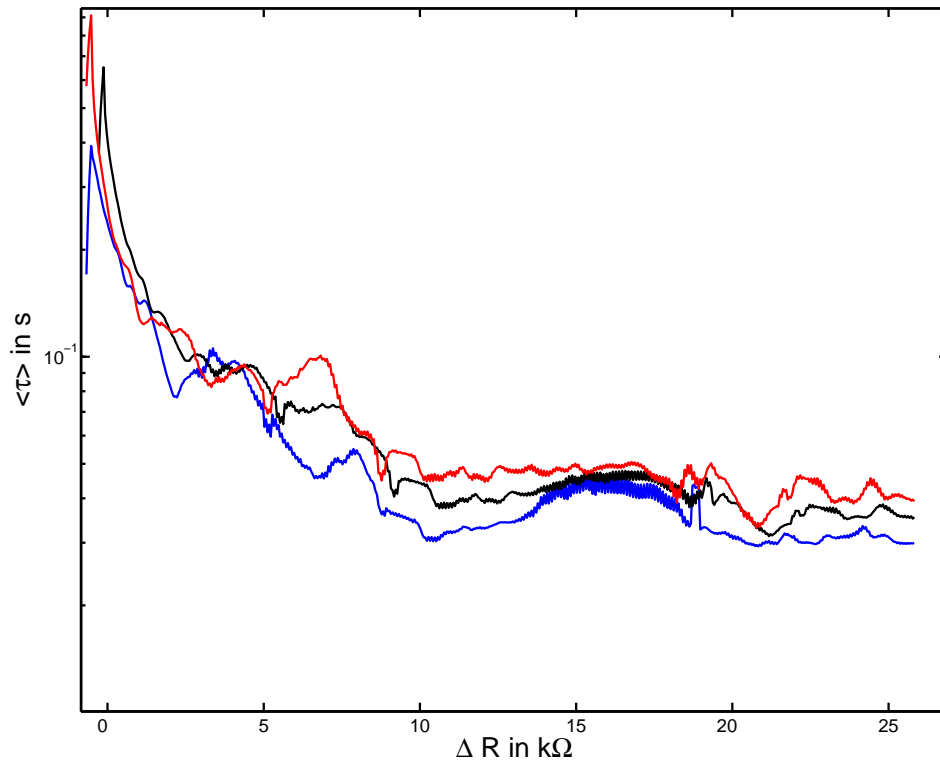


Abbildung 5.6: Auswirkung einer anliegenden konstanten Spannung von 50mV auf die Verweildauern in den dynamischen Zuständen bei  $V_1 > 0$  bzw.  $V_1 < 0$ . Obgleich die konstante Spannung in dem vereinfachten Bild eines Doppelmuldenpotentials permanent  $\langle \tau_1 \rangle > \langle \tau_2 \rangle$  fordert, zeigt das Experiment auch  $\langle \tau_1 \rangle < \langle \tau_2 \rangle$ . Neben  $\langle \tau_1 \rangle$  und  $\langle \tau_2 \rangle$  ist auch der Mittelwert, um  $R_{mod}(R_c) = 400\Omega$  verschoben, dargestellt (schwarze Kurve).

Legt man am Shinriki-Oszillator statt der periodischen Modulation eine Gleichspannung an, so wird die mittlere Verweildauer auf den beiden Subattraktoren unterschiedlich groß. Anhand des Doppelmulden-Modells der stochastischen Resonanz (vgl. Abb. 4.5) ist dies einfach zu verstehen, denn eine konstante Modulation würde hier zu einer längeren Verweildauer  $\langle \tau_1 \rangle$  im abgesenkten Zustand führen, wohingegen die Verweildauer  $\langle \tau_2 \rangle$  im angehobenen Zustand entsprechend kürzer wäre. Werden diese Verweildauern für unterschiedliche Kontrollparameter gemessen, so ist  $\alpha_1$  proportional zur Differenz der Raten  $\langle \tau_1 \rangle^{-1} - \langle \tau_2 \rangle^{-1}$ , und  $\alpha_0$  ermittelt man aus der Summe der Raten [73].

Abb. 5.6 zeigt die Messdaten des Shinriki-Oszillators für einen Gleichspannungswert von 50mV. Neben den rot und blau dargestellten Ergebnissen für  $\langle \tau_1 \rangle$  bzw.  $\langle \tau_2 \rangle$  ist ebenso der Mittelwert  $\langle \tau \rangle = (\langle \tau_1 \rangle + \langle \tau_2 \rangle)/2$  in schwarz gegeben. Dieser Mittelwert wurde um  $400\Omega$  verschoben dargestellt, was dem Wert von  $R_{mod}$  in der Nähe von  $R_c$  entspricht (vgl. Gl. (5.1)). Vergleicht man den Mittelwert mit der mittleren

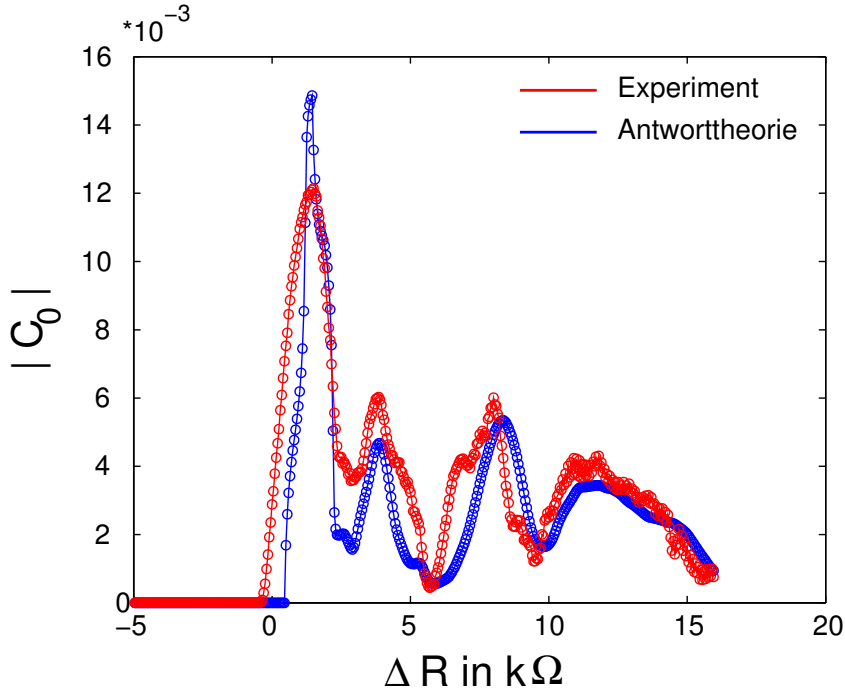


Abbildung 5.7: Vergleich zwischen den experimentellen Ergebnissen und der Vorhersage der linearen Antworttheorie. Die Parameter  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  der linearen Antworttheorie wurden aus den Messergebnissen in Abb. 5.6 bestimmt. Dargestellt ist der Betrag von  $C_0$  bei einer Modulationsamplitude von 50mV und einer Modulationsfrequenz von 30Hz.

Verweildauer in Abb. 3.19, die ohne zusätzliche Gleichspannung gemessen wurde, so passen die Ergebnisse dieser Messungen sehr gut zueinander, allerdings treten bei den Daten mit angelegter Gleichspannung keine periodischen Fenster auf.

Die Messdaten von  $\langle \tau_1 \rangle$  und  $\langle \tau_2 \rangle$  in Abhängigkeit von  $\Delta R$  zeigen deutlich den Unterschied dieses Systems zum einfachen Doppelmulden-System aus Abb. 4.5. In der Doppelmulde würde durch eine konstante Verkippung immer  $\langle \tau_1 \rangle > \langle \tau_2 \rangle$  folgen, wohingegen die Messdaten des Shinriki-Oszillators auch Bereiche zeigen in denen  $\langle \tau_1 \rangle \leq \langle \tau_2 \rangle$  ist. Dieser Wechsel von Bereichen in denen  $\langle \tau_1 \rangle$  größer bzw. kleiner ist als  $\langle \tau_2 \rangle$  führt zu einem Vorzeichenwechsel von  $\alpha_1$  und somit zu mehreren Extrema von  $C_0$ .

Mit den zusätzlichen Ergebnissen zum Ersatzwiderstand  $R_{mod}$  Gl. (5.2) und den Messdaten für  $\langle \tau_1 \rangle$  und  $\langle \tau_2 \rangle$  war es möglich, den Betrag der Kreuzkorrelationsfunktion  $|C_0|$  ohne weitere Fitparameter nach Gl. (4.30) zu berechnen. Selbst der in Gl. (4.30) auftretende Parameter  $c$  ist durch die Messung festgelegt, denn  $C_0$  wurde aus der gefilterten Zeitreihe bestimmt (vgl. Abb. 3.18) und bei dieser Filterung wurde  $c = 1.5V$  gewählt.

Abb. 5.7 zeigt die Vorhersage der linearen Antworttheorie und die aus den Messdaten gewonnene Kreuzkorrelationsfunktion  $C_0$  im direkten Vergleich. Die Übereinstimmung zwischen Vorhersage und den Messdaten ist sehr gut:

- Die lineare Antworttheorie und das Experiment zeigen dieselbe Anzahl von Maxima.
- Die Lage der Maxima und Minima von  $|C_0|$  wird gut durch die Vorhersage beschrieben.
- Der Wert von  $|C_0|$  und damit die Verstärkung stimmen bis auf das erste Maximum gut überein.

Dabei zeigt sich die deutlichste Abweichung zwischen der linearen Antworttheorie und dem experimentellen Ergebnis beim ersten Maximum, das deutlich schmaler und höher vorhergesagt wird. Diese Abweichung lässt sich dadurch erklären, dass in der Formel zur Berechnung der Korrelation (4.30)  $\Delta R^{-1}$  auftaucht. Am kritischen Kontrollparameterwert verschwindet  $\Delta R$ , folglich divergiert dort die Kreuzkorrelation. Da es mir hier um eine generelle Bestätigung der gemessenen stochastischen Resonanz durch die lineare Antworttheorie ging, wurde auf die Anwendung von anderen Verfahren [73] verzichtet, die diese Divergenz von  $|C_0|$  vermeiden.

Erstmalig ist es gelungen, eine gute Übereinstimmung zwischen experimentellen Ergebnisse zur rauschfreien stochastischen Resonanz und den Vorhersagen der linearen Antworttheorie zu erreichen. Diese Übereinstimmung zeigt deutlich, dass das für stochastische Systeme gewonnene Ratengleichungsmodell der stochastischen Resonanz sich ebenso für rauschfreie intermittente Systeme eignet. Darüberhinaus zeigt das Auftreten von stochastischer Multiresonanz in Vorhersage und Experiment, dass tatsächlich  $\langle \tau \rangle$  als nichtmonotone Funktion des Kontrollparameters  $\Delta R$  zu mehreren Maxima der Verstärkung führt.



# Kapitel 6

## Stochastisches Modell

Wie gezeigt, lässt sich die stochastische Resonanz am Shinriki-Oszillators gut mit den Methoden der linearen Antworttheorie beschreiben. Obwohl diese Beschreibung eindeutig ist, kann man sich die fragen, inwieweit das Auftreten von stochastischer Multiresonanz auch im Rahmen eines stochastischen Modells verstanden werden kann. Insbesondere die Arbeit von W. Just et al. [65] hat mich motiviert, die deterministische Dynamik des Shinriki-Oszillators auf ein stochastisches Modell abzubilden. In dieser Arbeit zeigten die Autoren die Ähnlichkeit der stochastischen Resonanz bei stochastischem und chaotischen Antrieb und berechneten eine effektive Rauschstärke für die Wirkung des chaotischen Antriebs in der Langevin-Gleichung (4.27). Zur Klärung der stochastischen Resonanz im Shinriki-Oszillator ist es nötig, noch einen Schritt weiter zu gehen, und die dynamische Bistabilität des doublescroll-Attraktors auf ein Potential abzubilden. Die Methode dieser Transformation folgt dem Grundgedanken einer Kramers-Moyal-Entwicklung und ermöglicht eine direkte Bestimmung aller wesentlichen Parameter des stochastischen Modells aus Zeitreihen des chaotischen Schwingkreises.

### 6.1 Kramers-Moyal Entwicklung

Die Dynamik des Shinriki-Schwingkreises im Bereich der kriseninduzierten intermittenz besitzt eine gewisse Ähnlichkeit mit der Dynamik eines stark gedämpften Teilchens in einer Doppelmulde unter Einfluss von Rauschen. In beiden Systemen findet sich eine Zeitskalenseparation, die durch eine schnelle Bewegung in den Zuständen und eine langsame Sprungdynamik zwischen den Zuständen gekennzeichnet ist. Üblicherweise wird die Bewegung des gedämpften Teilchens durch eine stochastische Differentialgleichung vom Langevin-Typ beschrieben:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\xi. \quad (6.1)$$

In dieser allgemeinen Form der Langevin-Gleichung ist  $f(x) = -\frac{dV}{dx}$  die deterministische Kraft, die durch das Potential  $V(x)$  auf das Teilchen wirkt und  $g(x)\xi$  die

stochastische Kraft, die häufig auch als Langevin-Kraft bezeichnet wird. Für eine Rauschintensität  $g(x)^2 = D$ , die nicht vom Ort  $x$  abhängt, beschreibt die Gleichung den Fall eines additiven Rauschens. Hängt die Rauschintensität hingegen vom Ort des Teilchens ab, liegt ein multiplikatives Rauschen am System an. Alle Terme der Langevin-Gleichung sind auf die viskose Reibung  $\gamma$  normiert.

Liegt von einem System mit zufälliger Dynamik die Zeitreihe  $x(t)$  vor, kann die Dynamik durch die Kramers-Moyal-Entwicklung auf eine Langevin-Gleichung abgebildet werden. Die einzige Bedingung, die für diese Abbildung erfüllt sein muss, wird an den Zufallsprozess gestellt. Dieser muss markovsch sein. Unter einem Markov-Prozess versteht man einen Zufallsprozess, dessen Realisierung  $x(t_1)$  nur vom direkt vorausgegangenem Zeitschritt  $x(t_1 - dt)$  abhängt, nicht aber von der weiteren Vorgeschichte des Systems [74].

Die Herleitung der Kramers-Moyal-Entwicklung, die ich im Folgenden kurz umreißen werde, folgt der Darstellung in [12]. Ziel dieser Herleitung ist es, aus einer Zeitreihe  $x(t)$  den Driftkoeffizienten  $D^{(1)}(x)$  und den Diffusionskoeffizienten  $D^{(2)}(x)$  einer Fokker-Planck-Gleichung zu bestimmen. Fokker-Planck-Gleichungen beschreiben – ähnlich wie Ratengleichungen – die zeitliche Entwicklung einer Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(x, t)$  und werden häufig benutzt, um stochastische Differentialgleichungen wie (6.1) zu lösen:

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)}(x) \right] p(x, t) \quad (6.2)$$

Betrachtet man die Diffusion eines Teilchens in der Doppelmulde ( Gl. (4.20)), ist der Vorteil einer Fokker-Planck-Gleichung, dass im Gegensatz zur Ratengleichung auch die Dynamik in den beiden Zuständen berechnet werden kann. Darüber hinaus existieren für partielle Differentialgleichungen dieser Art zahlreiche Lösungsmethoden, die nicht zuletzt im Rahmen der Quantenmechanik entwickelt wurden. Für additives Rauschen sind die Koeffizienten der Fokker-Planck-Gleichung und der deterministische bzw. stochastische Anteil der Langevin-Gleichung einfach ineinander umzurechnen, wohingegen multiplikatives Rauschen zu einer Modifikation des Driftkoeffizienten führt.

Zur Berechnung von  $D^{(1)}(x)$  betrachtet man eine kleine Änderung von  $x(t)$  und berechnet hieraus  $dx$ . Aus der Langevin-Gleichung (6.1) ergibt sich<sup>1</sup>:

$$dx = x(t + \tau_e) - x(t) = \int_t^{t+\tau_e} dt' (f(x(t')) + g(x(t'))\xi(t')) \quad (6.3)$$

---

<sup>1</sup>Wie in [12] wird die Definition eines stochastischen Integrals nach Stratonovich benutzt.



Für kleine Werte von  $\tau_e$  werden nun die Funktionen  $f(x(t'))$  und  $g(x(t'))$  in eine Reihe entwickelt:

$$\begin{aligned} f(x(t')) &= f(x(t)) + \frac{\partial f(x(t))}{\partial x} [x(t') - x(t)] + \dots, \\ g(x(t')) &= g(x(t)) + \frac{\partial g(x(t))}{\partial x} [x(t') - x(t)] + \dots \end{aligned} \quad (6.4)$$

Berücksichtigt man  $[x(t') - x(t)] = \int_t^{t'} dt'' (f(x) + g(x)\xi(t''))$ , so erhält man durch Einsetzen der Entwicklung in (6.3):

$$\begin{aligned} dx &= \int_t^{t+\tau_e} f(x) dt' + \int_t^{t+\tau_e} \frac{\partial f(x)}{\partial x} \int_t^{t'} f(x) dt'' dt' \\ &+ \int_t^{t+\tau_e} \frac{\partial f(x)}{\partial x} \int_t^{t'} g(x)\xi(t'') dt'' dt' + \dots \\ &+ \int_t^{t+\tau_e} g(x)\xi(t') dt' + \int_t^{t+\tau_e} \frac{\partial g(x)}{\partial x} \int_t^{t'} f(x)\xi(t') dt'' dt' \\ &+ \int_t^{t+\tau_e} \frac{\partial g(x)}{\partial x} \int_t^{t'} g(x)\xi(t'')\xi(t') dt'' dt' + \dots \end{aligned} \quad (6.5)$$

Zur Herleitung eines ortsabhängigen Driftkoeffizienten mittelt man diesen Ausdruck bezüglich aller Werte, an denen  $x(t) = X$  ist. Berücksichtigt man  $\langle \xi(t) \rangle = 0$  und  $\langle \xi(t'')\xi(t') \rangle = \delta(t'' - t')$ , so erhält man:

$$\langle dx \rangle_{x(t)=X} = \langle x(t + \tau_e) - x(t) \rangle_{x(t)=X} = \tau_e f(x) + \tau_e \frac{\partial g(x)}{\partial x} g(x). \quad (6.6)$$

Der Driftkoeffizient  $D^{(1)}(x)$  ergibt sich im Grenzwert  $\tau_e \rightarrow 0$  zu:

$$D^{(1)}(x) = \lim_{\tau_e \rightarrow 0} \frac{1}{\tau_e} \langle x(t + \tau_e) - x(t) \rangle_{x(t)=X} = f(x) + \frac{\partial g(x)}{\partial x} g(x). \quad (6.7)$$

Analog zu der vorgestellten Rechnung ergibt sich der Diffusionskoeffizient  $D^{(2)}(x)$  aus der Berechnung von  $\langle dx^2 \rangle_{x(t)=X}$ :

$$D^{(2)}(x) = \frac{1}{2} \lim_{\tau_e \rightarrow 0} \frac{1}{\tau_e} \langle [x(t + \tau_e) - x(t)]^2 \rangle_{x(t)=X} = g^2(x) \quad (6.8)$$

Die Entwicklung ergibt für alle höheren Koeffizienten  $D^{(n)}(x)$  mit  $n > 2$  nur Beiträge, deren Ordnung in  $\tau_e$  mindestens quadratisch ist und die deswegen vernachlässigt werden können.

Die Gleichungen (6.7) und (6.8) stellen einen einfachen Weg dar, aus langen Messreihen  $x(t)$  die Parameter  $f(x)$  und  $g(x)$  der Langevin-Gleichung (6.1) zu ermitteln. Insbesondere für additives Rauschen reduziert sich die Gleichung (6.7) auf den Anteil der Kraft, der von dem Potential  $V(x)$  verursacht wird.

Im folgenden Abschnitt werde ich die praktische Umsetzung dieser Analyse auf Zeitreihen des Shinriki-Oszillators im intermittenten Bereich vorstellen. Neben den Anforderungen an die Zeitreihen gehe ich auf weitere Modifikationen der Methode ein, die bei der realen Abbildung von experimentellen Daten auftreten.

## 6.2 Abbildung auf ein stochastisches Modell

Bei der Abbildung der intermittenten Sprünge auf ein stochastisches Modell wurden Drift und Diffusion aus einer skalaren Zeitreihe bestimmt. Die Reduktion des dreidimensionalen Systems auf eine skalare Messgröße führt zu einem Informationsverlust, denn zu einem bestimmten Wert der skalaren Größe können die beiden anderen Variablen des chaotischen Systems unterschiedliche Werte aufweisen. Betrachtet man die Flussgleichung des Shinriki-Oszillators (2.1), so kann jede der Gleichungen als Langevin-Gleichung in Gl. (4.27) aufgefasst werden, während die beiden anderen als chaotischer Antrieb dienen. Selbstverständlich besteht in Gl. (2.1) im Gegensatz zu Gl. (4.27) eine Kopplung zwischen der gewählten Langevin-Gleichung und den beiden anderen.

Als Vergleichskriterium zwischen der gemessenen Dynamik des Schwingkreises und dem stochastischen Modell wurde die mittlere Verweildauer  $\langle \tau \rangle$  in den beiden Zuständen gewählt. Während die mittlere Verweildauer  $\langle \tau \rangle$  des Schwingkreises sich direkt aus den Messdaten ergibt, kann die des stochastischen Systems als Kehrwert der Kramersrate Gl. (4.21) aus den Parametern der zu ermittelnden Langevin-Gleichung berechnet werden. Der Verlauf von  $\langle \tau \rangle$  bestimmt die stochastische Resonanz des Shinriki-Oszillators. Somit ist  $\langle \tau \rangle$  nicht nur ein gutes Bewertungskriterium für die Qualität der Abbildung auf einen stochastischen Prozess, sondern ermöglicht einen Einblick in den Mechanismus, der im stochastischen Modell zu stochastischer Multiresonanz führt.

Für die Bestimmung von Drift und Diffusion wurden lange Zeitreihen  $x(t)$  des Shinriki-Oszillators für unterschiedliche Werte des Kontrollparameters gemessen. Hierbei wurde die Zeitentwicklung der  $V_1$ -Zeitreihe ( $x(t) = V_1(t)$ ) bei hoher Auflösung der Transientenkarte ME2600 aufgezeichnet. Für die Abbildung der Sprungdynamik auf ein stochastisches Modell wurden für die Verschmelzkrise des Schwingkreises ca. 30000 Oszillationen auf den Subattraktoren mit einer Sampling-Rate von ca. 20 Punkten pro Periode aufgezeichnet. Die Sampling-Rate von 20 Punkten pro Periode entspricht einer Sampling-Zeit von  $\Delta t = 80 \mu\text{s}$ .

Dass für eine Abbildung nur sehr lange Zeitreihen mit hoher Zeit- und Amplitudenauflösung sinnvoll sind, ergibt sich aus der Mittelung über alle Punkte für die  $x(t) = X$  erfüllt ist (vgl. Gl. (6.7) und (6.8)). Ist die Zeitreihe zu kurz, wird der Mittelwert über zu wenige Werte durchgeführt, bei denen die Bedingung  $x(t) = X$  erfüllt ist.

Betrachtet man die hohen Anforderungen an die Qualität der Daten – lange Zeitreihen mit hoher Auflösung in Zeit und Amplitude – und den Rechenaufwand, der eine richtige Wahl der Zeitverschiebung  $\tau_e$  ermöglicht, werden die praktischen Probleme bei der Umsetzung klar. Um die Anforderungen an Speicherplatz und Rechnerleistung im vertretbaren Rahmen zu halten, beschränke ich mich bei dieser Analyse auf eine niedrige Dichte der Daten im Kontrollparameterraum. Die Schrittweite wurde auf  $100\Omega$  erhöht und der Bereich der kriseninduzierten Intermittenz mit einem deutlich größeren Raster durchfahren. Durch diese gröbere Rasterung

können kleinere Abweichungen vom monotonen Trend der mittleren Verweildauer auf den Subattraktoren nicht erfasst werden. Das Raster ist jedoch deutlich feiner als die typischen Strukturen in der Kreuzkorrelationsfunktion der stochastischen Resonanz. Damit reicht diese Auflösung aus, um die wesentlichen Mechanismen zu identifizieren, die zu dem Auftreten von stochastischer Multiresonanz führen.

Drift und Diffusion wurden aus den Zeitreihen mit Hilfe eines in Matlab geschriebenen Auswertalgorithmus bestimmt. Um eine ausreichend hohe Anzahl von Punkten zu haben, über die nach Gl. (6.7) bzw. Gl. (6.8) gemittelt wird, wurden die Daten in Intervalle der Breite  $\Delta X$  unterteilt, so dass über alle Auslenkungen  $x(t)$ , die in das jeweilige Intervall um einen bestimmten Wert  $x(t) = X$  fallen, der Mittelwert gebildet wird. Die Intervallbreite wurde zu  $\Delta X = 10\text{mV}$  gewählt, wodurch sich bei den Extremwerten der Zeitreihe von  $\pm 2.9\text{V}$  (vgl. Abb. 3.6) 580 Intervalle ergeben. Für jedes Intervall wurde die Entwicklung des Mittelwertes für eine Zeitverschiebung von  $\tau_e = 1$  bis  $100 \Delta t$  ausgewertet. Verglichen mit der Lyapunov-Zeit des Schwingkreises, die zwischen  $48\Delta t$  bis  $67\Delta t$  liegt, reicht der Wertebereich von  $\tau_e$  von einem Bruchteil der Lyapunov-Zeit bis hin zum annähernd doppelten Wert.

## 6.3 Zeitreihenanalyse mit stochastischem Signal

Um die Qualität des Matlab-Programms zur Bestimmung von Drift und Diffusion zu überprüfen, wurde die Langevin-Gleichung:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\xi = ax - bx^3 + \sqrt{D}\xi(t), \quad (6.9)$$

mit  $a = b = 1$  und  $D = 0.2$  numerisch untersucht. Für diese Simulation benutzte ich unter Matlab das Euler-Integrationsverfahren, wie in [13] beschrieben, mit einer Schrittweite von  $dt = 1/1000$  eines Zeitschritts. Mit Hilfe des Zeitreihenanalyse-Programms wurden Drift und Diffusion aus der Iterationsreihe  $x(t)$  bestimmt. Die verwendete Iterationsreihe war 40000 Zeitschritte lang. Bei der beschriebenen Diskretisierung der Daten in Bereiche der Breite  $\Delta X$  wurde  $\Delta X = 0.02$  gewählt, was auf ca. 1500 Intervalle führt.

Aus den Parametern der stochastischen Bewegungsgleichung (6.9) ergeben sich die Größen, die die mittlere Verweildauer bestimmen:  $\Delta V = 1/4$ ,  $\omega_0 = 1$  und  $\omega_b = \sqrt{2}$  [20]. Daraus folgt für die mittlere Verweildauer:

$$T_{K,theo} = \frac{2\pi}{\omega_0\omega_b} \exp\left(\frac{2\Delta V}{D}\right) \approx 54.1. \quad (6.10)$$

Dieser theoretische Wert stimmt gut mit dem Mittelwert der Verweildauern überein, der sich aus der Simulation zu  $T_{K,simu} = 54.3$  ergibt.

In Abb. 6.1 sind neben einem Zeitreihenausschnitt der Simulation die Ergebnisse für Drift und Diffusion bei einer Zeitverschiebung von  $\tau_e = 1dt$  dargestellt. Der in Abb. 6.1 (b) dargestellte Verlauf der Drift ist in guter Übereinstimmung mit dem erwarteten Verlauf, der sich aus Gl. (6.9) ergibt. In der Nähe von  $|x| \approx 0$  zeigen die

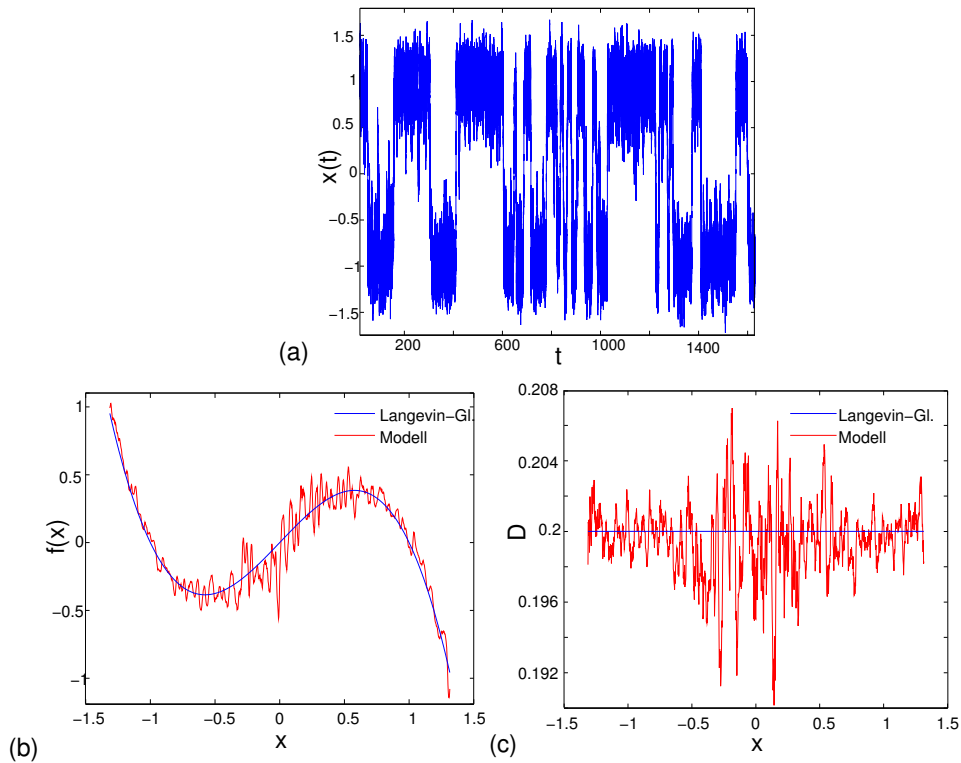


Abbildung 6.1: (a) Zeitreihe aus der Simulation von Gl. (6.9), (b) Drift in Abhängigkeit von  $x$ , (c) Diffusion in Abhängigkeit von  $x$ . In (b) und (c) sind neben den Ergebnissen der Zeitreihenanalyse (rote Kurven) auch der aus Gl. (6.9) erwartete Verlauf (blaue Kurven) dargestellt.

ausgewerteten Daten Fluktuationen um die zu erwarteten Werte. Diese Abweichung liegt an der geringen Anzahl von Sprüngen in  $x(t)$ , wodurch der statistische Fehler hier größer ist. Die in Abb. 6.1 (c) dargestellte Diffusion ist in Übereinstimmung mit der Bewegungsgleichung (6.9) ein additives Rauschen, wobei sich der angesprochene statistische Fehler wieder um  $|x| \approx 0$  zeigt.

Zur Bestimmung der mittleren Verweildauer nach Gl. (6.10) wurden alle Parameter der Gleichung aus den ermittelten Werte von Drift und Diffusion berechnet. Zur Bestimmung von  $\Delta V$ ,  $\omega_0$  und  $\omega_b$  aus dem Verlauf der Drift wurde das Polynom  $ax + bx^3$  an den ermittelten Verlauf angefitet und die Größen aus  $a$  und  $b$  bestimmt. Zur Bestimmung von  $D$  wurde der Mittelwert der in Abb. 6.1 (c) dargestellten Daten gebildet. Die Ergebnisse werden in der folgenden Tabelle mit den tatsächlichen Werten aus Gl. (6.9) verglichen:

Parameter:	Langevin-Gleichung (6.9)	Zeitreihenanalyse	Verhältnis
$D$ :	0.2	$0.19(9 \pm 2)$	1.005
$\Delta V = a^2/(4b)$ :	0.25	0.249	1.004
$\omega_0\omega_b = \sqrt{2} a $ :	$\sqrt{2}$	$\approx \sqrt{2}$	0.996

Aus der Zeitreihenanalyse folgt eine mittlere Verweildauer von  $T_{K,KME} = 53.5$ , die um ca. 2% von dem aus Gl. (6.9) ermittelten Wert  $T_K = 54.1$  abweicht. Diese Übereinstimmung zeigt deutlich, dass die verwendete Diskretisierung der Zeitreihe  $x(t)$  bei geeigneter Wahl von  $\Delta X$  zu sinnvollen Ergebnissen führt.

## 6.4 Zeitreihenanalyse der chaotischen Zeitreihen

Bei der Bestimmung von Drift und Diffusion aus Zeitreihen des Shinriki-Oszillators musste der Grenzwert  $\tau_e \rightarrow 0$  für das chaotische System interpretiert werden. Die Wahl von einem festen Wert von  $\tau_e$  für alle gemessenen Zeitreihen erfolgte für die verschiedenen Koeffizienten unabhängig:

Bei der Drift wertete ich die Zeitreihen mit  $\tau_e = 5 \cdot \Delta t$  aus. Für diesen Wert ergibt sich ein symmetrisches, bistabiles Potential  $V(x)$  aus der Drift. Die Potentialmulden von  $V(x)$  liegen bei  $x$ -Werten, die ungefähr den  $V_1$ -Werten entsprechen, an denen die instabilen Fixpunkte in den Zentren der Subattraktoren liegen. Für die Auswertung der Diffusion erwies sich eine deutlich größere Zeitverschiebung von  $\tau_e = 35 \cdot \Delta t$  als geeignet, die knapp unterhalb der bestimmten Lyapunov-Zeit  $T_\lambda \approx 48\Delta t$  bis  $67\Delta t$  liegt.

In Abb. 6.2 ist der Verlauf des Driftkoeffizienten  $f(x)$  und das an die Daten angefitzte Polynom für eine Zeitreihe von  $\Delta R = 1.6\text{k}\Omega$  dargestellt. Der Verlauf von  $f(x)$  ist typisch für eine Kraft, die von einem symmetrischen, bistabilen Potential verursacht wird und daher drei Nullstellen zeigt. Diese drei Nullstellen treten in  $f(x)$  bei allen untersuchten Zeitreihen auf. Neben der trivialen Nullstelle bei  $x = 0\text{V}$  ist  $f(x) = 0$  bei  $x$ -Beträgen zwischen  $1.8\text{V}$  und  $1.7\text{V}$ . Wie in den dargestellten Daten sind die beiden Nullstellen für alle  $\Delta R$ -Werte symmetrisch. Die in Abb. 6.2 eingezeichneten Geraden zeigen, dass die Drift nahezu linear anwächst bzw. abfällt. Das rot eingezeichnete Polynom approximiert den Verlauf von  $f(x)$  aber recht gut, so dass eine Bestimmung von  $\Delta V$ ,  $\omega_0$  und  $\omega_b$  möglich ist.

In Abb. 6.3(a) ist die Potentialbarriere  $\Delta V$  als Funktion von  $\Delta R$  dargestellt. Deutlich sichtbar ist eine Abnahme von  $\Delta V$ , wenn der Kontrollparameter erhöht wird. Die Abnahme von  $\Delta V$  für steigende  $\Delta R$ -Werte korrespondiert zum Anwachsen des Überlapps zwischen den Subattraktoren und den Einzugsgebieten, was zur Abnahme der mittleren Verweildauer führt (vgl. Abb. 3.14). Der scharfe Einbruch von  $\Delta V$  bei  $\Delta R = 2.3\text{k}\Omega$  hängt mit der Pomeau-Manneville-Intermittenz zusammen, die sich bei diesem Kontrollparameterwert zeigt. Abb. 6.3(b) zeigt das Produkt von  $\omega_0$  und  $\omega_b$ , umgerechnet auf  $1/\text{s}$ , in Abhängigkeit von  $\Delta R$ . Für den ganzen Bereich

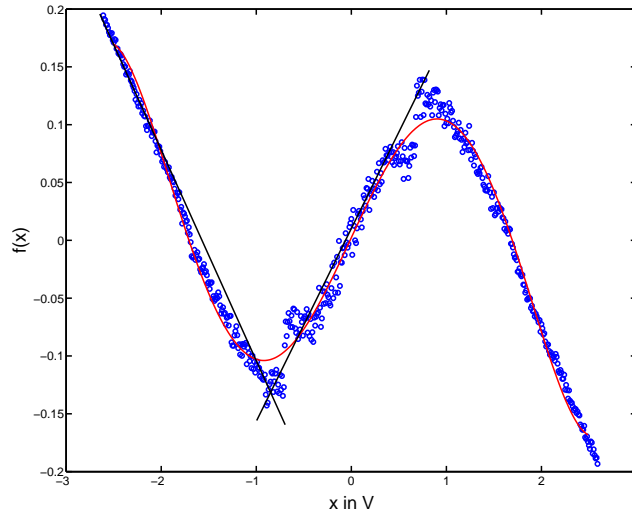


Abbildung 6.2: Verlauf der Drift als Funktion der Spannung  $x = V_1$ . Neben den blau dargestellten Daten ist ein Polynom angefitet worden (rote Kurve). Die beiden Geraden verdeutlichen den unterschiedlichen Verlauf von  $f(x)$  für  $|x| > 0.8\text{V}$  bzw.  $|x| < 0.8\text{V}$ .

bis  $\Delta R > 7.5\text{k}\Omega$  liegt die Frequenz in einem Wertebereich, der gut zur Frequenz der chaotischen Oszillationen im Shinriki-Oszillator mit ca. 630Hz passt.

Abb. 6.4(a) zeigt die ausgewertete Diffusion  $D$  in Abhängigkeit von der Spannung  $x$  für die gemessene Zeitreihe bei  $\Delta R = 1.6\text{k}\Omega$ . Die Diffusion zeigt wieder in drei  $x$ -Betragsbereichen unterschiedliches Verhalten. Für  $|x| > 1\text{V}$  ist der Mittelwert der Diffusion mit  $3.5 \cdot 10^{-2}\text{V}^2/\text{s}$  klein. Bei  $|x| < 0.5\text{V}$  ist die Diffusion nahezu konstant mit einem Wert von  $D = 8.2 \cdot 10^{-2}\text{V}^2/\text{s}$ . Zwischen diesen Bereichen zeigt die Diffusion jeweils ein Minimum und Maximum. Die Position dieser Struktur stimmt in etwa mit den Spannungswerten überein, an denen die invariante Dichte  $\rho(V_1)$  (vgl. Abb. 3.4) ihre Maxima aufgrund des Überschwingens zeigt. Es ist anzunehmen, dass die Maxima und Minima aufgrund einer unzureichenden Statistik entstehen und für längere Zeitreihen verschwinden [75].  $D$  würde somit bei dem Mittelwert liegen, der mit dem Wert im Bereich  $|x| < 0.5\text{V}$  übereinstimmt. Allerdings wäre  $D$  selbst bei langen Zeitreihen immer noch multiplikativ.

In Abb. 6.4(b) ist die Entwicklung einer mittleren Diffusion  $D$  über den Bereich der kriseninduzierten Intermittenz dargestellt. Da die mittlere Verweildauer wesentlich durch die Diffusion im Bereich zwischen den beiden Extremwerten von  $f(x)$  bestimmt wird [12], wurde das multiplikative Rauschen durch ein additives genähert. Die mittlere Diffusion  $D$  wurde aus den Diffusionswerten berechnet, die sich für die  $x$ -Werte zwischen  $\pm 1\text{V}$  ergaben. Eine weitere Reduzierung des Bereiches, über den gemittelt wird, auf  $x$ -Werte zwischen  $\pm 0.5\text{V}$  zeigte kaum Einfluss auf die resultierenden Werte von  $D$ . Der in Abb. 6.4(b) dargestellte Verlauf von  $D$

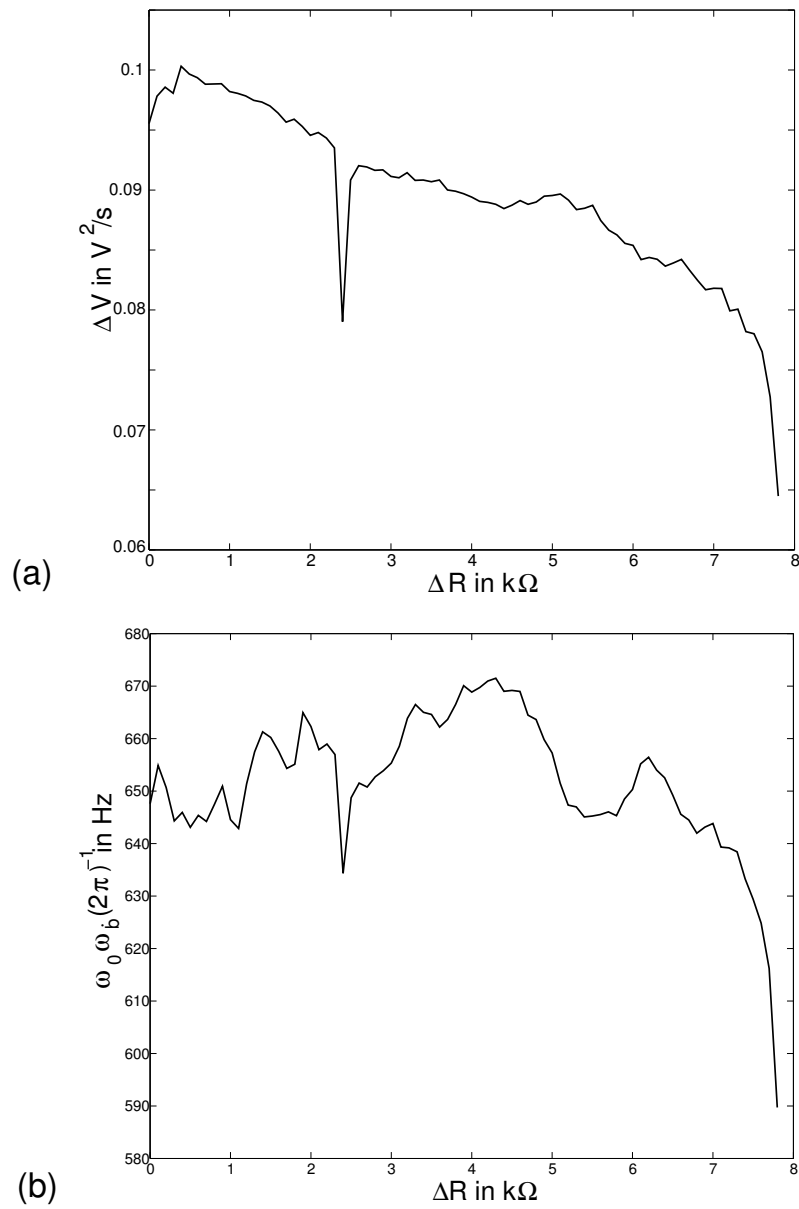


Abbildung 6.3: (a) Die ermittelte Potentialbarriere  $\Delta V$  für die verschiedenen Werte von  $\Delta R$ . (b) Das Produkt der Kreisfrequenzen  $\omega_0$  und  $\omega_b$  als Funktion von  $\Delta R$  umgerechnet auf Hz.

als Funktion von  $\Delta R$  kann wie folgt beschrieben werden:  $D$  wächst unterhalb von  $\Delta R = 2.3\text{k}\Omega$  an und zeigt zwischen  $\Delta R = 3\text{k}\Omega$  und  $4.5\text{k}\Omega$  ein Plateau, indem die Diffusion sich nur wenig ändert. Oberhalb dieses Plateaus steigt  $D$  bei Erhöhung des Kontrollparameters erneut an. Das isolierte Maximum bei  $\Delta R = 2.3\text{k}\Omega$  resultiert aus der Pomeau-Manneville-Intermittenz.

Aus den ermittelten Werten von  $D$ ,  $\Delta V$  und  $\omega_0\omega_b$  wurde nach Gl. (6.9) die mittlere Verweildauer  $T_{K,\text{modell}}$  berechnet. Sie ist in Abb. 6.5 in Abhängigkeit von  $\Delta R$  dargestellt. Für den Vergleich zwischen dem stochastischen Modell und dem chaotischen Schwingkreis zeigt die Abbildung auch den Verlauf von  $\langle\tau\rangle$ , der sich direkt aus den gefilterten Zeitreihen (vgl. Abb. 3.18) ergab. Unterhalb von  $\Delta R = 0.5\text{k}\Omega$  führen die ermittelten Werte des stochastischen Modells zu keinen sinnvollen Ergebnissen, was an einer zu geringen Anzahl von Sprüngen in der gemessenen Zeitreihe liegt. Oberhalb von  $\Delta R = 0.5\text{k}\Omega$  ist die Übereinstimmung der mittleren Verweildauern vom Shinriki-Oszillator und stochastischem Modell ausgezeichnet. Selbst in dem Bereich zwischen  $\Delta R = 3\text{k}\Omega$  und  $5\text{k}\Omega$ , in dem die mittlere Verweildauer des stochastischen Modells über den Werten von  $\langle\tau\rangle$  liegt, beträgt die Abweichung unter 20%. Die mittlere Abweichung über den kompletten dargestellten Bereich ist unter 5%. Die Übereinstimmung der mittleren Verweildauern für Kontrollparameterwerte unterhalb von  $\Delta R = 2.5\text{k}\Omega$  ist besonders interessant. In diesem Bereich zeigt  $\langle\tau\rangle$  die für kriseninduzierte Intermittenz charakteristische Abhängigkeit:  $\langle\tau\rangle \sim \Delta R^{-\gamma}$ .

## 6.5 Diskussion der Ergebnisse

Durch die vorgestellte Auswertung der Zeitreihen des Shinriki-Oszillators konnten alle Parameter bestimmt werden, die zur Berechnung der mittleren Verweildauer notwendig sind. Die gewählten  $\tau_e$ -Werte führen zu Ergebnissen für Drift und Diffusion, die die intermittente Sprungdynamik des Schwingkreises sehr gut reproduzieren. Der wesentliche Schritt in der Herleitung von Drift (6.7) und Diffusion (6.8) ist die Mittelung von Gl. (6.5), bei der die beiden Eigenschaften des Rauschens:  $\langle\xi(t)\rangle = 0$  und  $\langle\xi(t')\xi(t)\rangle = \delta(t' - t)$  benutzt werden. Die Wahl von  $\tau_e = 35\Delta t$  bei der Auswertung der Diffusion passt zu dieser Mittelung: Der Mittelwert der verschiedenen Spannungen im Shinriki-Oszillator ergibt für jede Zeitverschiebung ungefähr Null (vgl. Abb. 3.7). Da  $\tau_e$  darüber hinaus nahe bei der Lyapunov-Zeit des Shinriki-Oszillators liegt, ist die chaotische Dynamik auf dieser Zeitskala vergleichbar mit unkorreliertem Rauschen [76].

Der Wert von  $\tau_e = 5\Delta t$ , der zur Bestimmung der Drift benutzt wurde, erscheint problematisch. Für diese kleine Zeitverschiebung sind die Werte der Zeitreihe noch hoch korreliert. Dennoch gestattet dieser kleine Wert für  $\tau_e$  die Abbildung auf ein stochastisches Modell mit additivem Rauschen. Für eine größere Zeitverschiebung ist dies nicht möglich, denn oberhalb von  $\tau_e = 20\Delta t$  ist die Drift nahezu linear und besitzt nur noch die triviale Nullstelle. Natürlich könnte man versuchen, die



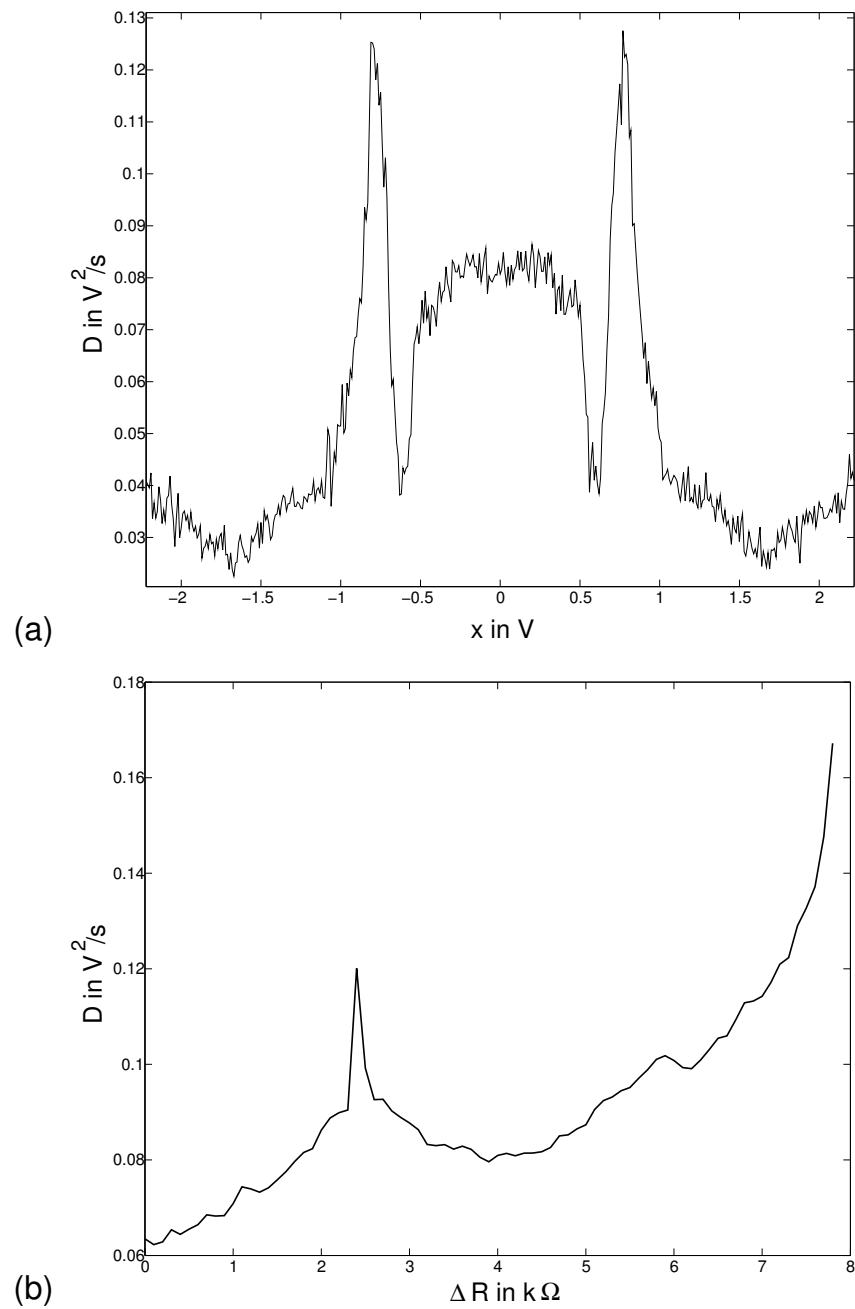


Abbildung 6.4: (a) Diffusion  $D$  als Funktion der Spannung  $x = V_1$ . Die scharfen Maxima und Minima zwischen  $1V > |x| > 0.5V$  weisen auf eine unzureichende Statistik hin. (b) Die ermittelte Diffusion  $D$  als Funktion des Kontrollparameters  $\Delta R$ .

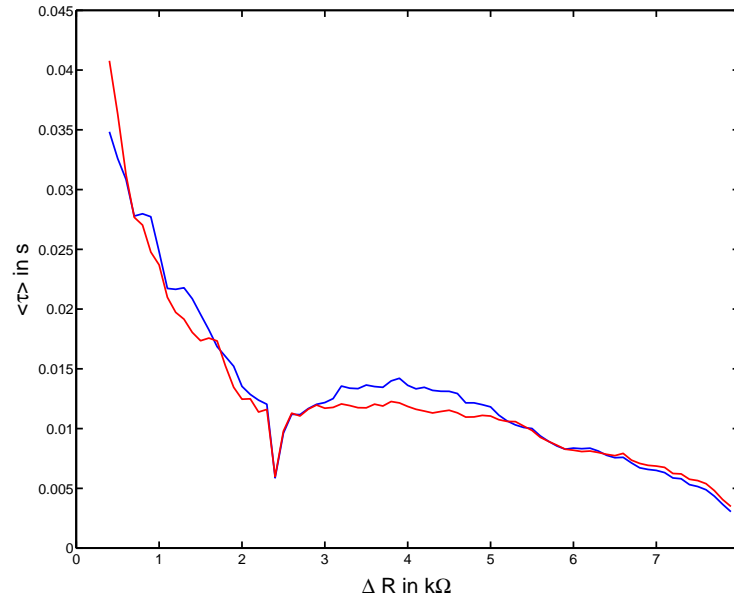


Abbildung 6.5: Mittlere Verweildauer des Shinriki-Oszillators: Die blaue Kurve zeigt die mittlere Verweildauer berechnet nach Gl. (6.9) aus den Ergebnissen der Kramers-Moyal Analyse. Die rote Kurve zeigt die direkt gemessene mittlere Verweildauer des Shinriki-Oszillators.

Auswirkungen von multiplikativem Rauschen zu erfassen, die nach Gl. (6.7) den Verlauf der Drift modifizieren. Ein stochastisches Modell mit multiplikativem Rauschen erfordert eine noch höhere Qualität und Länge der Zeitreihen des Systems, denn schließlich muss  $\partial g / \partial x$  aus den Daten der Diffusion bestimmt werden. Die höheren Anforderungen an die Zeitreihen und die aufwendigere Bestimmung des Potentials machen es mehr als fraglich, ob bei der guten Übereinstimmung zwischen der berechneten mittleren Verweildauer des Modells und dem gemessenen  $\langle \tau \rangle$  des Schwingkreises dieser Aufwand wirklich notwendig ist.

Betrachtet man die Entwicklung der Potentialbarriere  $\Delta V$  in Abb. 6.3 und der mittleren Diffusion  $D$  in Abb. 6.4 bei Erhöhung des Kontrollparameters  $\Delta R$ , so liegt der Trend von  $\Delta V$  bis  $\Delta R \approx 7 \text{ k}\Omega$  in einer nahezu linearen Abnahme der Werte. Bei der Veränderung von  $D$  zeigen die Daten keinen so deutlichen Trend. Die Steigung von  $D$  variiert während des Anwachsens stark und verschwindet nahezu im Kontrollparameterbereich  $3 \text{ k}\Omega < \Delta R < 4.5 \text{ k}\Omega$ . Die nichtmonotone Abnahme der mittleren Verweildauer bei Erhöhen von  $\Delta R$  resultiert im stochastischen Modell folglich aus dem nichtmonotonen Anwachsen der Diffusion  $D$ .

Diese Folgerung aus dem stochastischen Modell macht die stochastische Multiresonanz im Shinriki-Oszillator verständlicher: Während bei gewöhnlicher stochastischer Resonanz bei einem konstanten Wert von  $\Delta V$  die Rauschintensität  $D$  erhöht wird, zeigt das stochastische Modell des Shinriki-Oszillators, dass  $\Delta V$  bei Erhöhung

von  $\Delta R$  abnimmt, während die Rauschintensität  $D$  nichtmonoton zunimmt. Da im experimentellen System die Rauschintensität  $D$  und der Wert von  $\Delta V$  des stochastischen Modells nicht unabhängig voneinander variiert werden können, sondern eine Veränderung von  $\Delta R$  beide Größen beeinflusst, resultiert eine nichtmonotone mittlere Verweildauer und damit stochastische Multiresonanz.



# Kapitel 7

## Zusammenfassung und Ausblick

Chaotische Systeme mit Intermittenz haben auf der langsamen Zeitskala der Sprungdynamik Ähnlichkeit mit bistabilen Systemen, die durch ein externes Rauschen getrieben werden. So erfolgen Sprünge zwischen den Zuständen unabhängig voneinander. Während bei stochastischen Systemen das externe Rauschen zu dem Zufallsprozess führt, wird dieser in intermittenten Systemen durch die schnelle chaotische Dynamik verursacht. In beiden Fällen kann die Sprungdynamik auf ein externes Modulationssignals synchronisiert werden, so dass auch in chaotischen Systemen stochastische Resonanz auftritt. Da sie hier ohne ein externes Rauschen auskommt nennt man dieses Phänomen rauschfreie stochastische Resonanz.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der stochastischen Resonanz am Shinriki-Oszillator, der oberhalb eines kritischen Kontrollparameterwertes kriseninduzierte Intermittenz zeigt. Bei angelegter Modulation zeichnet sich der Schwingkreis durch eine stochastische Resonanz mit mehreren Verstärkungsmaxima aus. Der Schwerpunkt der vorgestellten Untersuchungen betraf die Frage, welche Systemeigenschaften diese stochastische Multiresonanz verursachen.

Zu diesem Zweck wurden zunächst die statistischen Eigenschaften des Systems durch Zeitreihenanalyse ermittelt. Meine Analysen ergaben, dass der Schwingkreis im Intermittenzbereich nahezu konstante Werte von mittlerem Lyapunov-Exponenten und Korrelationsdimension hat und deshalb sich die Expansion und das Mischen auf dem Attraktor nicht wesentlich ändern. Die gemessene mittlere Verweildauer  $\langle \tau \rangle$  folgt dem für Verschmelzkrisen erwarteten Skalierungsgesetz, für dessen kritischen Exponenten ein Wert von  $\gamma \approx 0.69$  ermittelt wurde. Die an mehreren Kontrollparameterwerten gemessene Verteilung der Verweildauern belegt die Unabhängigkeit der Sprünge und demonstriert somit die Ähnlichkeit mit stochastischen Systemen.

Die experimentellen Ergebnisse der stochastischen Resonanz an der Verschmelzkrisen zeigen, unabhängig davon ob periodisch oder aperiodisch moduliert wurde, mehrere Verstärkungsmaxima. In dem Maß, mit dem die stochastische Resonanz ermittelt wurde der Kreuzkorrelationsfunktion zwischen Modulation und Systemantwort, erscheinen die Verstärkungsmaxima als Extrema. Bei periodischer Modu-

lation konnte erstmalig eine gute Übereinstimmung zwischen den gemessenen Werten der Kreuzkorrelationsfunktion und den aus der linearen Antworttheorie berechneten Werten erreicht werden. Für diesen Vergleich zwischen Theorie und Experiment gingen ausschließlich gemessene Werte in die Rechnung ein, so dass die Gleichartigkeit der Resonanzkurven ohne weitere Fitparameter zustande kam. Die Übereinstimmung belegt, dass die für stochastische Systeme gewonnenen Gleichungen der stochastischen Resonanz auch bei rauschfreien chaotischen Systemen angewendet werden können und dem Phänomen der stochastischen Resonanz in stochastischen wie rauschfreien Systemen derselbe Mechanismus zugrunde liegt. Darüber hinaus konnte anhand dieser Gleichungen die nichtmonotone Abhängigkeit zwischen der mittleren Verweildauer  $\langle \tau \rangle$  und dem Kontrollparameter als die Ursache für die gemessene stochastische Multiresonanz identifiziert werden.

Eine nichtmonotone Abhängigkeit zwischen mittlerer Verweildauer und Kontrollparameter ist bei stochastischen Systemen mit externem Rauschen und unveränderlichem Potential nicht gegeben. Um die stochastische Multiresonanz an der Verschmelzkrise des Shinriki-Oszillators auch durch ein stochastisches Modell verstehen zu können, wurde versucht das mehrdimensionalen Systems auf ein eindimensionales stochastisches Modell abzubilden. Die Abbildung folgte der Grundidee der Kramers-Moyal-Entwicklung. Mit einigen Näherungen war eine Abbildung der Sprungdynamik des chaotischen Systems auf ein stochastisches Modell möglich. In diesem Modell resultiert die nichtmonotone Abhängigkeit der Verweildauer vom Kontrollparameter aus einer gleichzeitigen Veränderung der Potentialbarriere zwischen den Zuständen und der Rauschintensität.

Die Dynamik des Shinriki-Oszillators im Intermittenzbereich ist typisch für eine größere Klasse von chaotischen Systemen. Insofern sprechen die am Shinriki-Oszillator gewonnen Ergebnisse dafür, dass stochastische Multiresonanz in einer Vielzahl von chaotischen Systemen auftritt. Die vorgestellten Methoden zur Ermittlung eines stochastischen Modells und die Berechnung der Kreuzkorrelationsfunktion mit Hilfe der linearen Antworttheorie sind so allgemein, dass sie ohne Weiteres auch bei anderen Systemen angewandt werden können.

Die Ähnlichkeit zwischen intermittenten und stochastischen Systemen kann mit Hilfe der stochastischer Resonanz noch weiter untersucht werden. Eine Möglichkeit bieten chaotische Systeme, die nach einer inneren Krise intermittentes Verhalten aufweisen. Charakteristisch für diese Intermittenz sind drei verschiedene Zeitskalen: Die der schnellen chaotischen Oszillationen und zwei weitere, die den unterschiedlichen Verweildauern in beiden Zuständen entsprechen. Kürzlich gelang in unserer Arbeitsgruppe sowohl numerisch als auch experimentell der Nachweis von stochastischer Multiresonanz an diesem Krisentyp [77]. Um die Synchronisation zwischen Modulation und Systemantwort zu untersuchen, wurde eine gefilterte Zeitreihe betrachtet, in der die beiden Zustände gleichwertig waren. Bei einigen Systemen sind die beiden mittleren Verweildauern jedoch deutlich verschieden. Damit erschließt sich die Möglichkeit Analogien zwischen rauschfreier stochastischer Resonanz und dem Verhalten von *reset-fire*-Modellen bei Neuronen zu untersuchen.

## Anhang A

# Aus- und Einkopplungsschaltungen des Shinriki-Oszillators

Bei der Entwicklung von Aus- und Einkopplungsschaltungen stand die Entkopplung des Shinriki-Oszillators von störenden Einflüssen durch Messgeräte und Funktionsgeneratoren im Vordergrund. Dabei sind die Ursachen für eine Störung der Systemdynamik vielfältig. Neben dem eigentlichen Messprozess, bei dem ein Strom zwischen System und Messgerät fließt, können z.B. unterschiedliche Massenpotentiale der angeschlossenen Geräte zu Störungen führen. Die verwendeten Schaltungen begrenzen den Messstrom und verhindern weitere Störungen.

Für die Messung der Zeitreihen und Spektren des Systems musste die Auskopplung so gestaltet werden, dass sowohl Geräte mit hochohmigen Eingangswiderstand (Transientenkarte und Oszilloskop) als auch der Spektrumanalysator mit einem Eingangswiderstand von  $50\Omega$  angeschlossen werden konnten. Zur Auskopplung wurde an den Messpunkten von  $V_1$ ,  $V_2$  und  $V_3$  (vgl. Abb. 2.1) Auskopplungsschaltungen angeschlossen. Die drei Schaltungen sind identisch und bestehen aus zwei hintereinander geschalteten Verstärkern.

In Abb. A.1 ist eine Skizze der verwendeten Auskopplung zu finden. Der Op<sub>1</sub>-Verstärker ist als nichtinvertierender Verstärker mit einem Verstärkungsfaktor  $G = 1$  aufgebaut. Um einen möglichst geringen Messstrom aus dem Shinriki-System in die Messapparatur zu verursachen, wurde hier ein AD711JN Op-Verstärker von Analog Devices verwendet. Dieser besitzt einen hohen Eingangswiderstand von  $10^{12}\Omega$  an beiden Eingängen des Op-Verstärkers [78]. Aufgrund des hohen Eingangswiderstandes wird diese Schaltung bei hochohmigen Verbrauchern (Transientenkarte und positiver Eingang des Op<sub>2</sub>-Verstärkers) eingesetzt. Ein weiterer Vorteil liegt in der Verschaltung als nichtinvertierender Verstärker: Die Rückkopplung der Ausgangsspannung des Op-Verstärkers geschieht am negativen Eingang. Die Eingangsspannung des Schwingkreises liegt hingegen am positiven Eingang. Dies ermöglicht eine effektive Entkopplung der Messapparatur vom Schwingkreis.

Für die zweite Verstärkerschaltung in Abb. A.1 wurde ein AD844AN Op-Verstärker von Analog Devices benutzt [79], dessen Eingangswiderstand am invertierenden

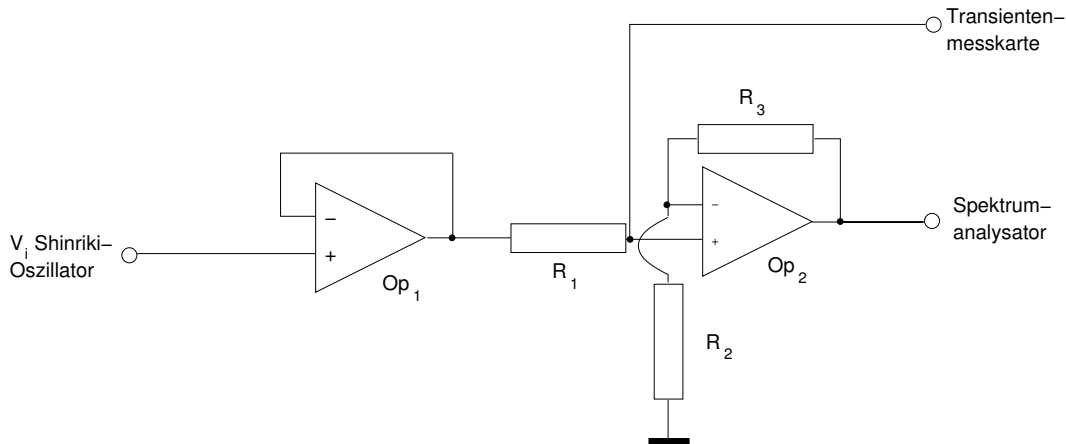


Abbildung A.1: Skizze der verwendeten Auskopplungsschaltung.

Eingang  $50\Omega$  und am positiven Eingang  $10M\Omega$  beträgt. Mit diesen unterschiedlichen Eingangswiderständen eignet sich dieser Op-Verstärker für Anwendungen, bei denen einerseits eine Begrenzung des Messstromes gefragt ist, andererseits niederohmige Verbraucher angeschlossen sind. Die dargestellte Verschaltung des  $Op_2$ -Verstärkers als nichtinvertierender Verstärker folgt diesem Gedanken: Die Eingangsspannung liegt am hochohmigen Eingang an und minimiert so den Eingangsstrom in den Op-Verstärker. Andererseits ermöglicht die Rückkopplung der Ausgangsspannung des Op-Verstärkers über den Spannungsteiler ( $R_2$  und  $R_3$ ) auf den invertierenden Eingang das Treiben von niederohmigen Verbrauchern (Spektrumanalysator). Bei der Umsetzung dieses Entwurfs wurden für die drei Widerstände folgende Werte benutzt:  $R_1 = 51\Omega$ ,  $R_2 = 16k\Omega$  und  $R_3 = 30k\Omega$ . Der Widerstand  $R_1$  bietet dabei eine Anpassung an das angeschlossene BNC-Kabel zwischen Schwingkreis und Transientenkarte. Der Wert von  $R_2$  und  $R_3$  führen zu einem Verstärkungsfaktor des zweiten Verstärkers von  $G = 1 + R_3/R_2 \approx 3$ . Die Op-Verstärker wurde mit einer Versorgungsspannung von  $\pm 15V$  betrieben. Die Konstanz dieser Spannungen wurde über parallelgeschaltete Kondensatoren ( $C = 0.1\mu F$ ) gewährleistet.

Während die Anforderungen der Auskopplungsschaltung bezüglich der Frequenzbandbreite durch die niedrige Schwingkreisfrequenz von  $630Hz$  gering sind, musste bei der Einkopplungsschaltung die Bandbreite deutlich größer sein. Diese höhere Bandbreite war wegen der Experimente zur rauschinduzierten Krise notwendig, bei denen ein farbiges Rauschen mit einer maximalen Bandbreite von  $0.1Hz$  bis  $70kHz$  eingekoppelt wurde. Die Experimente zur stochastischen Resonanz an der rauschinduzierten Krise erforderten die Möglichkeit, gleichzeitig das Rauschen und eine weitere Modulation am Schwingkreis anzulegen.

Abb. A.2 zeigt eine Einkopplungsschaltung, die diese Anforderungen erfüllt. Die Funktionsgeneratoren sind jeweils an einem invertierenden Verstärker angeschlossen. Die Ausgangsspannungen der Verstärker werden durch einen Addierer aufsum-



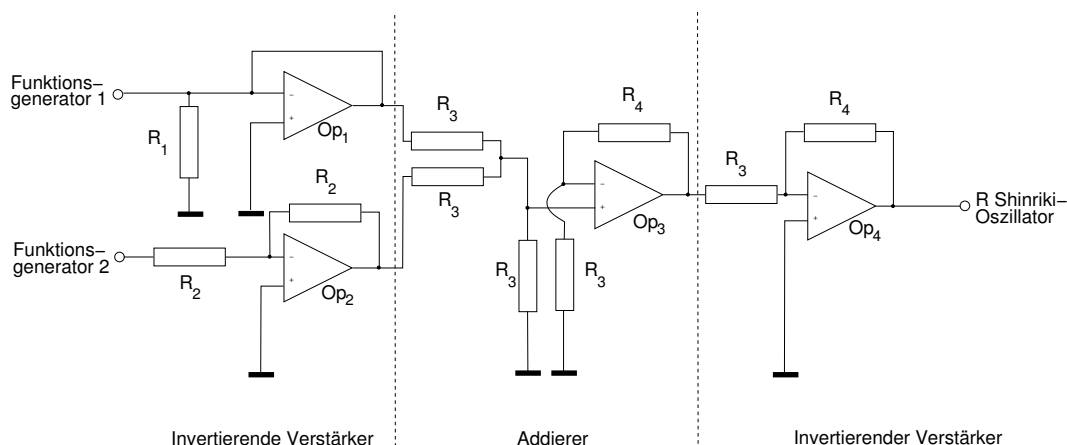


Abbildung A.2: Skizze der verwendeten Einkopplungsschaltung.

miert und über einen weiteren invertierenden Verstärker in das System am Kontrollparameter  $R$  (vgl. Abb. 2.1) eingekoppelt.

Das Rauschen kann an den  $OP_1$ -Verstärker angelegt werden. Als OP-Verstärker diente wieder der AD844AN, der sich durch eine hohe Bandbreite von 60MHz auszeichnet [79]. Das Rauschen wird am Widerstand  $R_1$  abgegriffen, der mit  $51\Omega$  auf den niederohmigen invertierenden Eingang des AD844AN angepasst ist. Bei der Verwendung des AD844AN als invertierendem Verstärker ergibt als den Verstärkungsfaktor dieser Schaltung  $G = -1$ . Für den zweiten invertierenden Verstärker, an dem die periodische Modulation mit einer maximalen Frequenz von 50Hz anliegt, muss die Bandbreite nicht so groß sein. Deshalb wurde als  $OP_2$ -Verstärker ein AD711JN von Analog Devices eingesetzt, dessen Bandbreite mit 3MHz angegeben wird [78]. Die beiden Widerstände des Invertierers wurden gleich gewählt ( $R_2 = 1k\Omega$ ), woraus auch für diesen Verstärker ein Verstärkungsfaktor von  $G = -1$  folgt.

Der auf die Verstärker folgende Addierer erfüllt neben seiner offensichtlichen Aufgabe – dem Summieren der Signale – noch einen weiteren Zweck: Durch den nichtinvertierenden Addierer werden die Funktionsgeneratoren vom Shinriki-Oszillator entkoppelt. Dies geschieht, wie bei der Auskopplungsschaltung erläutert, durch die Trennung der Spannungen, die am positiven und negativen Eingang des Op-Verstärkers anliegen. Um keine Verluste in der Frequenzbandbreite der Schaltung zu erhalten, wurde als  $OP_3$ -Verstärker ein AD847JN von Analog Devices eingesetzt. Dieser Op-Verstärker hat eine Frequenzbandbreite von 50MHz und an beiden Eingängen einen Eingangswiderstand von  $300k\Omega$  [80]. Durch diese hochohmigen Eingänge kann der Operationsverstärker als nichtinvertierender Summierer verschaltet werden. Die verschiedenen Widerstände in der Schaltung sind  $R_3 = 510\Omega$  und  $R_4 = 1.2k\Omega$ , woraus ein Verstärkungsfaktor  $G = 1$  resultiert [81].

Der letzte invertierende Verstärker dieser Schaltung wurde mit einem Op-Verstärker vom Typ AD844AN aufgebaut. Die Verwendung eines negativen Verstärkers als Abschluss einer Einkopplungsschaltung ist aus Gründen der Rauschstabilität immer ratsam [81]. Aus den Widerstandswerten  $R_3$  und  $R_4$  folgt ein Verstärkungsfaktor von  $G = -2$ , bei dem der AD844AN eine Frequenzbandbreite von 33MHz aufweist [79]. Somit limitiert dieser Verstärker die maximale Frequenzbandbreite der Einkopplungsschaltung. Von Vorteil ist die Verstärkung von  $-2$ , da sie den untersuchbaren Amplitudenbereich der Modulation erheblich vergrößert. Darüberhinaus ist die Gesamtverstärkung der Einkopplungsschaltung positiv, was die Auswertung der Kreuzkorrelationsfunktion vereinfacht.

# Anhang B

## Schmitt-Trigger

Während in Kapitel 4 nur die Messergebnisse zur stochastischen Resonanz am realen Schmitt-Trigger vorgestellt wurden, finden sich hier die experimentellen Details der verwendeten Schaltung. Neben den Schaltungsdetails werde ich weitere Messergebnisse zur raumzeitlichen stochastischen Resonanz an einem Ring aus vier Schmitt-Trigger vorstellen. Bei geeigneter raumzeitlicher Modulation zeigt dieser Ring stochastische Multiresonanz.

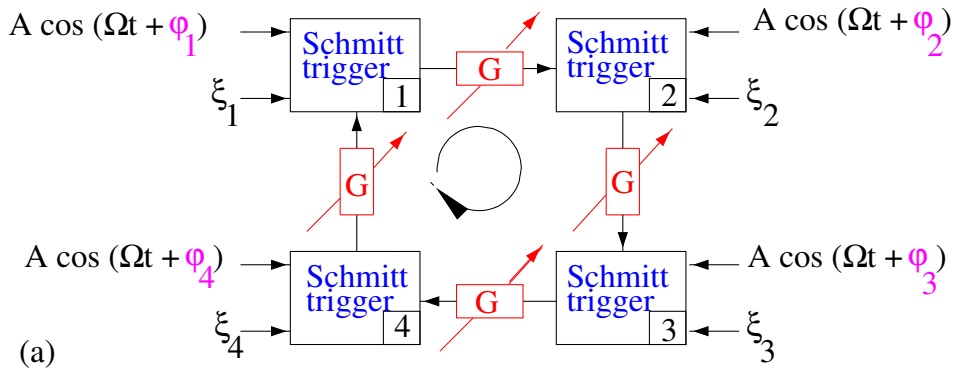
### B.1 Aufbau und Messungen

Aus dem Schalt diagramm des invertierenden Schmitt-Triggers in Abb. 4.1(a) ergibt sich eine Schwellenspannung  $V_{TH}$ , die nur von der Wahl der beiden Widerstände  $R_1$ ,  $R_2$  und den Sättigungsspannungen  $V_{\pm sat}$  des Op-Verstärkers abhängt [81]:

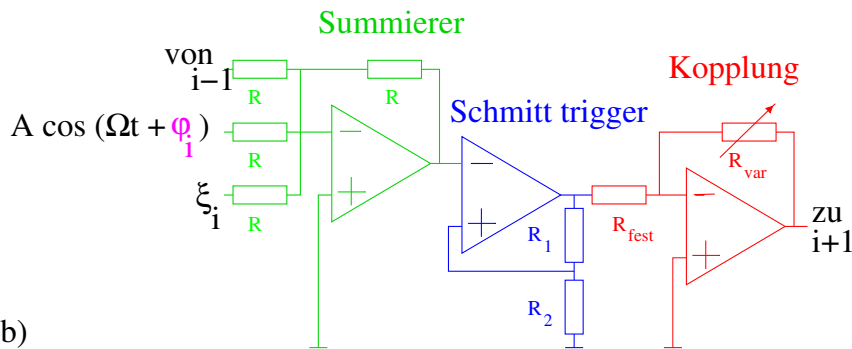
$$V_{TH} = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\pm sat}. \quad (\text{B.1})$$

Als Op-Verstärker wurde im Experiment ein TL081 verwendet, dessen Versorgungsspannung bei  $\pm 5\text{V}$  lag. Aus der Versorgungsspannung ergibt sich eine Sättigungsspannung von ungefähr  $\pm 4.2\text{V}$  [82]. Die Widerstände wurden mit  $R_1 = 5.1\text{k}\Omega$  und  $R_2 = 390\Omega$  gewählt, woraus sich die Schwellenspannung als  $V_{TH} \approx \pm 280\text{mV}$  ergibt.

Um experimentelle Ergebnisse gut mit theoretischen Vorhersagen vergleichen zu können, muss der Schmitt-Trigger sehr schnell zwischen den beiden Zuständen springen können. Die Geschwindigkeit eines Wechsels hängt von der *slew rate* des Op-Verstärkers ab. Mit  $13\text{V}/\mu\text{s}$  ist diese beim TL081 relativ hoch [82]. Beachtet man, dass die Differenz der Ausgangsspannungen beider Zustände kleiner als  $10\text{V}$  ist, folgt eine Sprungzeit von  $< 1\mu\text{s}$ . Mit diesem experimentellen Aufbau können die Experimente zur stochastischen Resonanz mit einem Rauschgenerator hoher Bandbreite durchgeführt werden. Bei der Messung der stochastischen Resonanz, dargestellt in Abb. 4.3, wurde ein Rauschgenerator von Hewlett-Packard (HP33120A) verwendet, der eine Bandbreite von  $10\text{MHz}$  besitzt. Die periodische



(a)



(b)

Abbildung B.1: (a) Schematische Darstellung des Ringes aus vier gekoppelten Schmitt-Trigger. (b) Schalt diagramm eines Einzelements mit Summierer und Kopplungsschaltung zum Nachelement.

Modulation hatte eine Amplitude von  $A_m = 100\text{mV}$  und eine Frequenz von  $1\text{kHz}$ . Analog zu den sonstigen vorgestellten Messungen, wurde die Kreuzkorrelationsfunktion direkt in Labview berechnet, nachdem die Signale mit der Meilhaus 2600 Transientenkarte aufgezeichnet wurden.

## B.2 Raumzeitliche stochastische Resonanz

Die stochastische Resonanz in räumlich ausgedehnten Systemen spielt in der aktuellen Forschung eine große Rolle. Gerade im Bereich der Neurologie ist man mit der gekoppelten Dynamik vieler Einzelemente konfrontiert, die stochastische Resonanz zeigen. Dabei zeigt sich, dass die stochastische Resonanz in gekoppelten Systemen zu einer deutlichen Erhöhung der Korrelation zwischen Signal und Systemdynamik führen kann [52].

Der Effekt dieser Verstärkung tritt auch in einem Ring aus gekoppelten Schmitt-Trigger auf. In Abb. B.1(a) ist der verwendete Aufbau schematisch dargestellt. Die Kopplung zwischen den einzelnen Schmitt-Trigger war unidirektional, so dass die

Dynamik von Element ( $i$ ) direkt von der Dynamik des Elements ( $i - 1$ ) beeinflusst wurde nicht aber vom Element ( $i + 1$ ). Darüber hinaus konnte durch den invertierenden Verstärker (vgl. Abb. B.1(b)) die Stärke der negativen Kopplung  $G$  verändert werden. Die Konfiguration dieses Rings mit unidirektionaler, negativer Kopplung erinnert an eine antiferromagnetische Spinkette, denn die negative Kopplung begünstigt eine alternierende Ausrichtung der benachbarten Elemente.

Für die Untersuchung der stochastischen Resonanz wurden neben dem Kopplungssignal an jeden Schmitt-Trigger ein Rauschen und eine periodische Modulation angelegt. Die periodische Modulation hatte eine feste Frequenz, allerdings konnte eine Phasendifferenz zwischen den benachbarten Elementen ( $i$ ) und ( $i + 1$ ) vorliegen, was zu einer raumzeitlichen Modulation führt. Durch die Ringsymmetrie mit periodischen Randbedingungen konnten der Einfluss durch Phasendifferenzen von  $\Delta\varphi = \varphi_i - \varphi_{i+1} = 0, \pi/2, \pi$  und  $3\pi/2$  auf die stochastische Resonanz untersucht werden.

In den Experimenten wurde insbesondere das Zusammenwirken von raumzeitlicher Modulation und negativer Kopplung studiert. Während die negative Kopplung immer eine alternierende Ausrichtung der Schmitt-Trigger begünstigt, ist dies für die verschiedenen Werte der Phasenverschiebung nicht der Fall. Liegt keine Phasenverschiebung ( $\Delta\varphi = 0$ ) in der Modulation vor, begünstigt die Modulation eine Konfiguration, bei der alle Schmitt-Trigger im gleichen Zustand sind. Kopplung und Modulation wirken folglich gegeneinander. Bei einer Phasenverschiebung von  $\Delta\varphi = \pi$  führt der Einfluss von Kopplung und Modulation zur selben alternierenden Ausrichtung, und eine Verstärkung ist zu erwarten. Die Fälle  $\Delta\varphi = \pi/2$  und  $3\pi/2$  liegen zwischen den beiden Extremen: Während einer Periodendauer der Modulation treten Bereiche auf, in denen die alternierende Konfiguration der Schmitt-Trigger begünstigt bzw. behindert wird. Dieser ständige Wechsel zwischen Begünstigung und Behinderung der alternierenden Konfiguration ist am Beispiel von  $\Delta\varphi = \pi/2$  in Abb. B.2 dargestellt. Unter der jeweiligen Modulation ist eine Zeitreihe des Schmitt-Triggers für den Fall gegeben, dass dieser der Modulation folgt. In denen mit Pfeilen angedeuteten Bereichen, wird die alternierende Konfiguration durch negative Kopplung vom Nachbarelement begünstigt. Aus diesem Schema kann man entnehmen, dass es entlang der Kette nicht nur zu einem zeitlichen Wechsel zwischen günstiger und ungünstiger Beeinflussung der Einzelelemente kommt, denn in den zeitlichen Bereichen, in denen Element ( $i$ ) und ( $i + 1$ ) eine günstige alternierende Struktur haben, ist das Element ( $i$ ) selbst ungünstig zu dem Element ( $i - 1$ ) ausgerichtet ist. Damit kommt zum zeitlichen Wechsel von günstiger und ungünstiger Ausrichtung der Einzelelemente ebenso ein räumlicher Wechsel entlang der Kette.

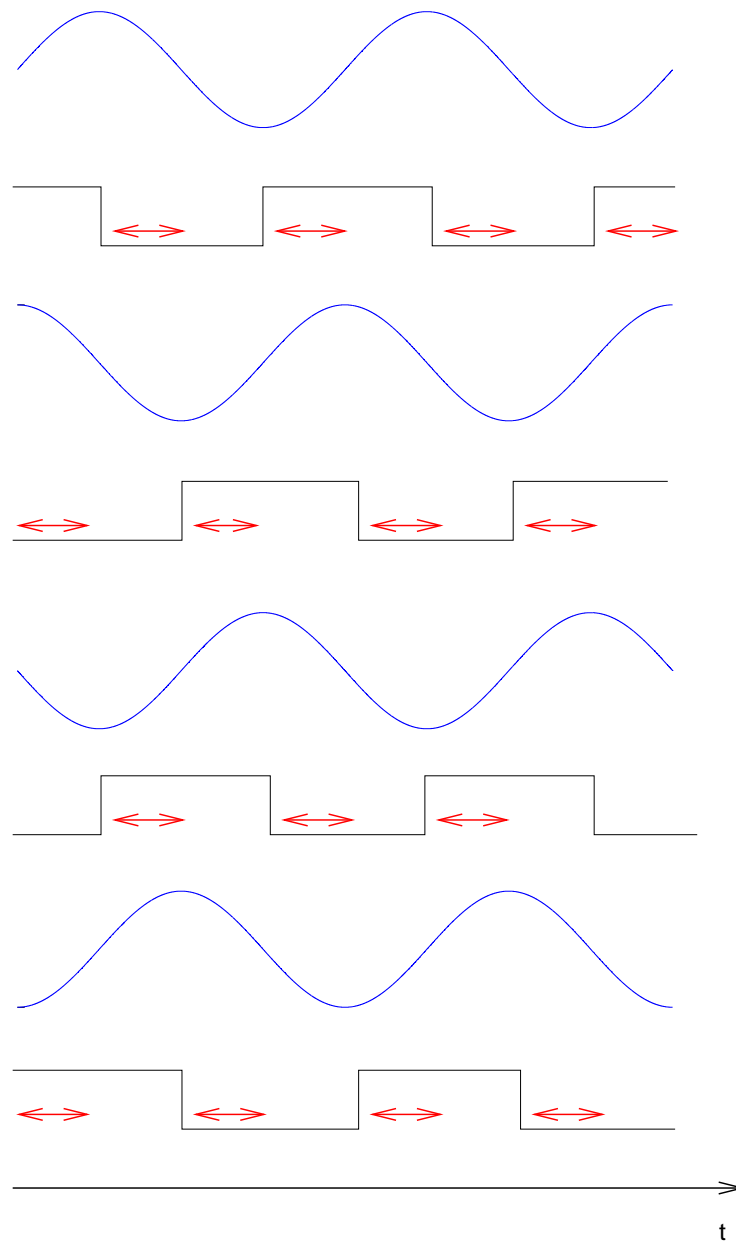


Abbildung B.2: Schematische Darstellung des Wechsels zwischen günstiger und ungünstiger Ausrichtung zwischen den Schmitt-Triggern entlang des Rings für  $\Delta\varphi = \pi/2$ . Unter der jeweiligen Modulation ist der Ausgang des Schmitt-Triggers skizziert. In den mit Pfeilen gekennzeichneten Bereichen begünstigt der vorhergehende Schmitt-Trigger im Ring den aktuellen Zustand.

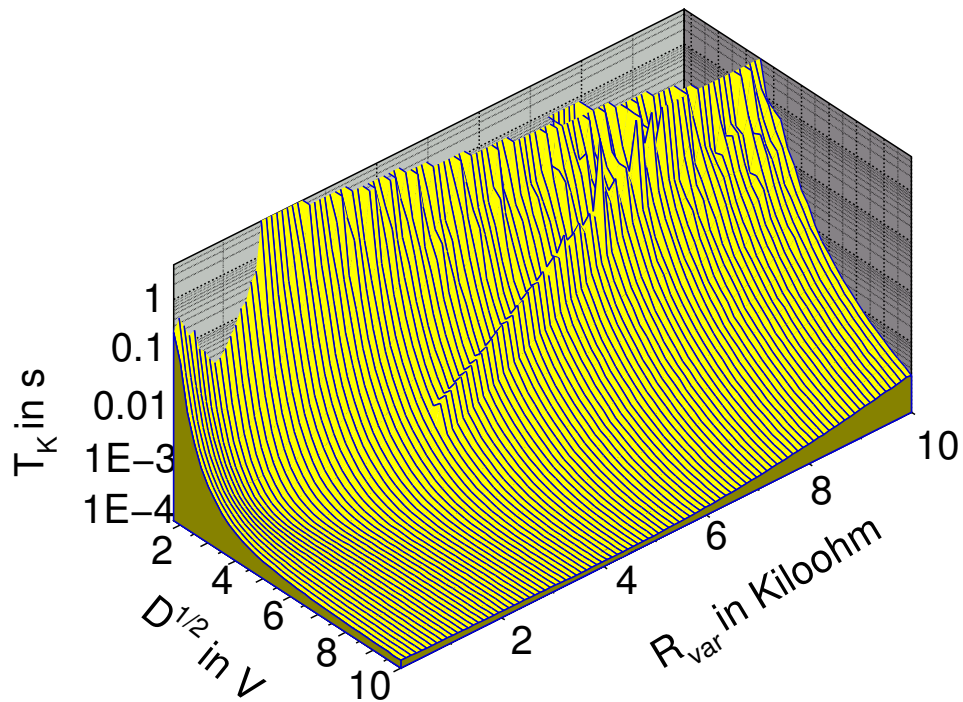


Abbildung B.3: Messung der Kramerszeit  $T_K$  eines Schmitt-Triggers im Ring in Abhängigkeit von der angelegten Rauschstärke  $\sqrt{D}$  und dem Kopplungswiderstand  $R_{var}$ .

Bei den experimentellen Untersuchungen wurden die gleichen Funktions- und Rauschgeneratoren benutzt wie zuvor. Für die raumzeitliche Modulation waren allerdings zwei HP8116A Funktionsgeneratoren notwendig. Modulationsfrequenz und Amplitude waren 1kHz und  $A_m = 100\text{mV}$ . Der Op-Verstärker, die Widerstandswerte und die Versorgungsspannung des Schmitt-Triggers sind identisch mit denen der Untersuchung am Einzelelement. Der in Abb. B.1(b) gezeigte Summierer hatte eine Verstärkung von eins ( $R = 5.1\text{k}\Omega$ ). Um den Einfluss der raumzeitlichen Modulation bei unterschiedlichen Kopplungen zu untersuchen, wurde der invertierende Kopplungsverstärker mit einem variablen Widerstand aufgebaut. Die Stärke der Kopplung ergibt sich aus:

$$G = \frac{R_{var}}{R_{fest}} = \frac{R_{var}}{43\text{k}\Omega}. \quad (\text{B.2})$$

Um die Messung zu automatisieren, wurden digital ansteuerbare Widerstände von Xicor [15] verwendet, die zwischen 0 (keine Kopplung) und  $10\text{k}\Omega$  (starke Kopplung) in 100 Schritten variiert werden konnten. Eine Veränderung der Kopplungsstärke  $G$  wurde global durchgeführt, wodurch  $G$  im ganzen Ring immer einen festen Wert hatte.

Für den Summierer und die Kopplung wurde wieder der Op-Verstärker TL081 benutzt. Um die Stärke der Kopplung und des Rauschens frei zu wählen und dennoch die Linearität des Summierers und des invertierenden Verstärkers zu gewährleisten, wurde eine Versorgungsspannung von  $\pm 15\text{V}$  angelegt.

Mit dem automatisierten Messaufbau wurde für jede mögliche Phasenverschiebung an 18000 Wertepaaren von Kopplungs- und Rauschstärke Zeitreihen eines einzelnen Schmitt-Triggers aufgenommen. Die Länge dieser Zeitreihen betrug etwa 1000 Modulationsperioden. Die hieraus berechnete Kreuzkorrelation zwischen Ausgang und periodischem Eingang des Schmitt-Triggers hing, wie durch die Ringsymmetrie zu erwarten, nicht von der speziellen Wahl des ausgewerteten Schmitt-Triggers im Ring ab.

Bei der Untersuchung des Ringes wurde zunächst ohne zusätzliche Modulation der Einfluss von Kopplung und Rauschstärke auf die Sprungrate untersucht. Die Messergebnisse finden sich in Abb. B.3. Man sieht deutlich, dass die dargestellte Kramerszeit  $T_K$  für einen festen Wert von  $\sqrt{D}$  bei Erhöhung der Kopplung zunächst geringer wird. Oberhalb einer bestimmten Kopplungsstärke steigt  $T_K$  wieder an. Wie bei anderen Systemen, die stochastische Multiresonanz zeigen, ist  $T_K$  also keine monotone Funktion. Der spezielle Verlauf von  $T_K$  ist im Ringsystem einfach zu erklären: Bei geringer Kopplung wird die Verweildauer  $T_K$  des gemessenen Schmitt-Triggers wenig durch das stochastische Springen des angekoppelten Nachbar-Schmitt-Triggers beeinflusst. Der Wert von  $T_K$  hängt im wesentlichen von der eingestellten Rauschstärke ab. Bei höheren Kopplungsstärken steigt der Einfluss der Dynamik des Nachbarelements zunächst an. Hierbei führt die Kombination von stochastischen Sprüngen des Nachbarelements und des lokal anliegenden Rauschens zu einer deutlichen Abnahme von  $T_K$ . Oberhalb einer gewissen Kopplungsstärke überwiegt der ordnende Einfluss der Kopplung das Rauschen. Durch die starke Kopplung sind die Elemente des Rings alternierend angeordnet und nur noch vereinzelt ist die Amplitude des Rauschens groß genug, um einen Sprung auszulösen. Dadurch wächst  $T_K$  wieder an, allerdings breiten sich Sprünge bei diesen Kopplungsstärken gleich durch den ganzen Ring aus.

In der Abb. B.4 sind die Ergebnisse dieser Untersuchung zusammengefasst. Das konstruktive Zusammenspiel bei einer Phasenverschiebung von  $\Delta\varphi = \pi$  führt zu einer stochastischen Resonanz, die sich im farbkodierten Konturplot (Abb. B.4 unten rechts) durch einen weiten Bereich hoher Korrelation auszeichnet. Die Verschiebung der maximalen Verstärkung zu höheren Werten für Kopplung und Rauschstärke sind bereits aus numerischen Untersuchungen bekannt [52]. Die Daten für  $\Delta\varphi = 0$  (Abb. B.4 oben links) zeigen dem destruktiven Zusammenspiel von Kopplung und raumzeitlicher Modulation entsprechend einen sehr kleinen Bereich, in dem es zur charakteristischen Verstärkung durch stochastische Resonanz kommt. Die Ergebnisse dieser beiden Messungen bestätigen frühere theoretische [52] und neuere experimentelle Untersuchungen [83]. So kann für  $\Delta\varphi = \pi$  gezeigt werden, dass die Kreuzkorrelationsfunktion eines Schmitt-Triggers im Ring größere Werte annimmt als bei einem Schmitt-Trigger ohne Kopplung [70]. Insbesondere führt eine Phasen-



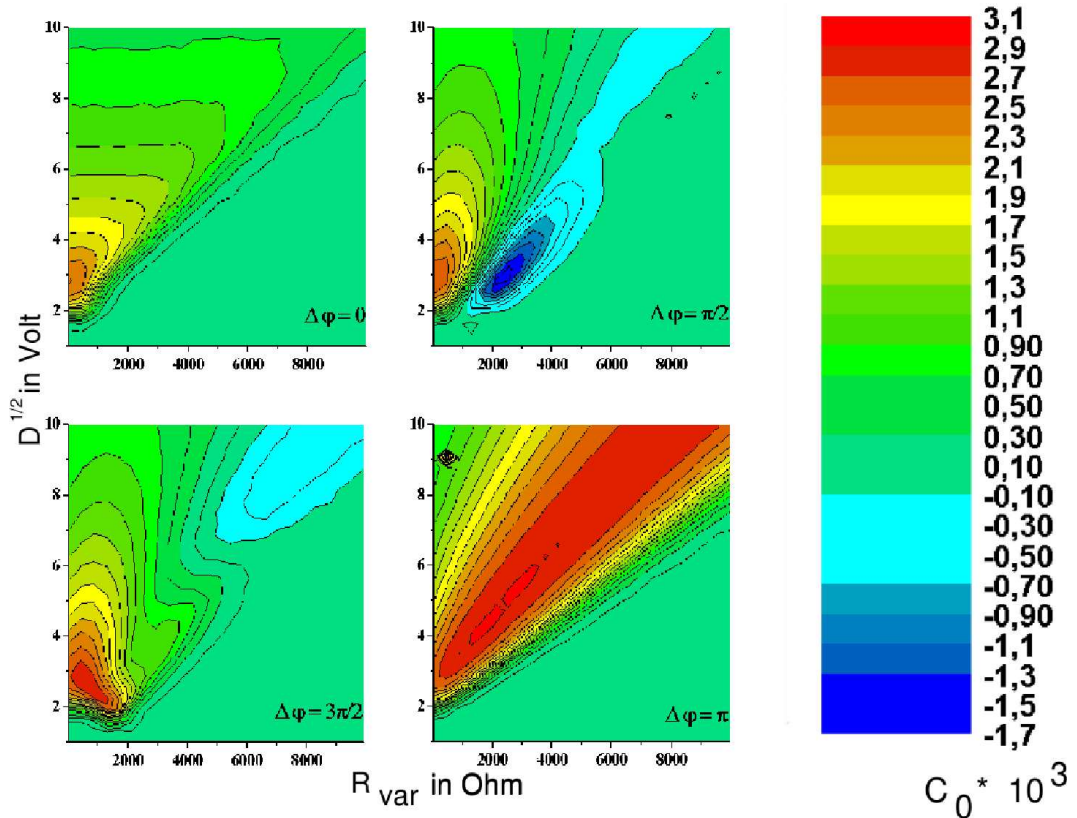


Abbildung B.4: Die gemessene Kreuzkorrelationsfunktion  $C_0$  eines Schmitt-Triggers im Ring als Funktion der Rauschstärke  $\sqrt{D}$  und des Widerstandes  $R_{var}$  für die verschiedenen Phasenverschiebungen von  $\Delta\varphi = \pi$ ,  $\Delta\varphi = 0$ ,  $\Delta\varphi = \pi/2$  und  $\Delta\varphi = 3\pi/2$ .

verschiebung von  $\Delta\varphi = \pi$  zur netzwerkverstärkten stochastischen Resonanz (*array enhanced stochastic resonance*). Bei uniformer Anregung ohne Phasendifferenz hingegen nimmt die Kreuzkorrelationsfunktion eines Schmitt-Triggers im Ring verglichen mit den Ergebnissen des ungekoppelten Systems kleinere Werte an.

Die Ergebnisse für eine Phasenverschiebung von  $\Delta\varphi = \pi/2$  bzw.  $3\pi/2$  (siehe Abb. B.4 oben rechts bzw. unten links) unterscheiden sich deutlich von den Ergebnissen der vorherigen Untersuchungen. Neben einem Bereich in dem die Kreuzkorrelationsfunktion  $C_0$  positive Werte aufweist, zeigen beide Messungen bei höheren Kopplungsstärken ein Minimum von  $C_0$  mit negativen Werten (blaue Farbe in der Graphik) und damit raumzeitlich induzierte stochastische Multiresonanz. Die Maximalwerte von  $C_0$  zeigen im Vergleich zum ungekoppelten Schmitt-Trigger, dass nur für  $\Delta\varphi = 3\pi/2$  der Effekt der netzwerkverstärkten stochastischen Resonanz auftritt.

Eine theoretische Erklärung für die Ursachen der raumzeitlich induzierten stochastischen Multiresonanz steht noch aus. Mit Hilfe der mittleren Verweildauer  $T_K$  im Ring (Abb. B.3) kann der Verlauf von  $C_0$  abgeschätzt werden. Die hierbei verwendete Methode ist analog zur Berechnung des zu erwartenden Verlaufes von  $C_0$  im Shinriki-Oszillator (vgl. Abb. 5.7 und Gl.(4.29)). Bei der Beurteilung der Ergebnisse muss berücksichtigt werden, dass die Methode in dieser Form nur für Einzelelemente gilt und den Einfluss durch Kopplung nicht enthält. Trotzdem deckt sich erwarteter Verlauf von  $C_0$  weitgehend mit den experimentellen Ergebnissen für  $\Delta\varphi = \pi/2$ . Da hier das Minimum bei geringen Kopplungsstärken auftritt, scheint die Abschätzung ohne Berücksichtigung der Nachbarkopplung noch hinreichend gut zu sein.

Bei der Klärung der Ursache von raumzeitlich induzierter stochastischer Multiresonanz wird die Tatsache, dass sie nur bei Phasenverschiebungen von  $\Delta\varphi = \pi/2$  und  $3\pi/2$  auftritt (nicht aber für  $\Delta\varphi = 0$  und  $\pi$ ) eine wichtige Rolle spielen. Wie in Abb. B.2 gezeigt, tritt hier ein komplizierter Wechsel zwischen zeitlichen und räumlichen Abschnitten gleichgerichteter und gegeneinanderwirkenden Einflüssen von Modulation und Kopplung auf, die vermutlich wesentlich zur stochastischen Multiresonanz beitragen.

# Literaturverzeichnis

- [1] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, and F. Marchsoni. Stochastic resonance. *Rev. Mod. Phys.*, 70:223, 1998.
- [2] C. Gerthsen, H. O. Kneser, and H. Vogel. *Gerthsen Physik*. 16. Aufl., Springer, Berlin, 1989.
- [3] J.A. Freund, J. Kienert, L. Schimansky-Geier, B. Beisner, A. Neiman, D.F. Russell, T. Yakusheva, and F. Moss. Behavioral stochastic resonance: How a noisy army betrays its outpost. *Phys. Rev. E*, 63:031910, 2001.
- [4] A. Neiman, X. Pei, D.F. Russell, W. Wojtenek, L. Wilkens, F. Moss, H.A. Braun, M.T. Huber, and K. Voigt. Synchronization of the noisy electrosensitive cells in the paddlefish. *Phys. Rev. Lett.*, 82:660, 1999.
- [5] A. Neiman and D.F. Russell. Stochastic biperiodic oscillations in the electroreceptors of paddlefish. *Phys. Rev. Lett.*, 86:3443, 2001.
- [6] R. Benzi, A. Sutera, and A. Vulpiani. The mechanism of stochastic resonance. *J. Phys. A*, 14:453, 1981.
- [7] R. Benzi, G. Parisi, A. Sutera, and Vulpiani A. Stochastic resonance in climatic change. *Tellus*, 34:10, 1982.
- [8] V.S. Anishchenko, A.B. Neiman, and M.A. Safanova. Stochastic resonance in chaotic systems. *J. Stat. Phys.*, 70:183, 1993.
- [9] J.M.G. Vilar and J.M. Rubi. Stochastic multiresonance. *Phys. Rev. Lett.*, 78:2882, 1997.
- [10] S. Matyjaskiewicz, A. Krawiecki, J.A. Holyst, K. Kacperski, and W. Ebeling. Stochastic multiresonance in a chaotic map with fractal basin of attraction. *Phys. Rev. E*, 63:026215, 2001.
- [11] A. Krawiecki, S. Matyjaskiewicz, K. Kacperski, and J.A. Holyst. Noise-free stochastic multiresonance near chaotic crises. *Phys. Rev. E*, 64:041104, 2001.
- [12] H. Risken. *The Fokker-Planck Equation*. 2nd Editon, Springer, Berlin, New York, 1996.

- [13] C.W. Gardiner. *Handbook of Stochastic Methods*. 3rd Editon, Springer, Berlin, New York, 2004.
- [14] M. Shinriki, M. Yamamoto, and S. Mori. Multimode oscillations in a modified van der Pol oscillator containing a positive nonlinear conductance. *Proc. IEEE*, 69:394, 1981.
- [15] Xicor Inc. Datasheet for the X9C103.
- [16] S. Wu. Chua's circuit family. *Proc. IEEE*, 75:8, 1987.
- [17] T. Matsumoto, L.O. Chua, and S.. Tanaka. Simplest chaotic nonautonomous circuit. *Phys. Rev. A*, 30:1155, 1984.
- [18] H.G. Schuster. *Deterministisches Chaos*. VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim, 1989.
- [19] P. Cvitanovic, R. Artuso, R. Mainieri, G. Tanner, G. Vattay, N. Whelan, and A. Wirzba. *Chaos classical and quantum*. [www.chaosbook.org](http://www.chaosbook.org), Version 11, 2004.
- [20] V.S. Anishchenko, V.V. Astakhov, A.B. Neiman, T.E. Vadivasova, and L. Schimansky-Geier. *Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems*. Springer, Berlin, 2002.
- [21] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, Berlin, New York, 1986.
- [22] H. Kantz and T. Schreiber. *Nonlinear time series analysis*. Cambridge University Press, 1997.
- [23] R. Hegger, H. Kantz, and T. Schreiber. Practical implementation of nonlinear time series methods: The tisean package. *CHAOS*, 9:413, 1999.
- [24] P. Manneville and Y. Pomeau. Intermittency and the Lorenz model. *Physics Letters A*, 75:1, 1979.
- [25] W. Lauterborn and J. Holzfuss. Evidence for a low-dimensional strange attractor in acoustic turbulence. *J. Phys. A*, 115:369, 1986.
- [26] E.N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 20:130, 1963.
- [27] T. Buzug. *Analyse chaotischer Systeme*. B.I.-Wissenschaftsverlag, 1994.
- [28] C. Grebogi, E. Ott, F. Romeiras, and J. A. Yorke. Critical exponents for crisis-induced intermittency. *Phys. Rev. A*, 36:5365, 1987.
- [29] C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke. Critical exponent of chaotic transients in nonlinear dynamical systems. *Phys. Rev. Lett.*, 57:1284, 1986.

- [30] H. Fujisaka and T. Yamada. A new intermittency in coupled dynamical systems. *Proc. Theor. Phys.*, 74:918, 1985.
- [31] H. J. Scholz, H. Brand, R. Graham, and T. Yamada. Intermittency and chaos in a laser system with modulated inversion. *Physics Letters A*, 82:321, 1981.
- [32] S.M. Hammel, C.K.R.T. Jones, and Moloney. Global dynamical behavior of the optical field in a ring cavity. *J. Opt. Soc. Am. B*, 2:552, 1985.
- [33] J. Becker, F. Rödelsperger, Th. Weyrauch, H. Benner, W. Just, and A. Cenys. Intermittency in spin-wave instabilities. *Phys. Rev. E*, 59:1622, 1999.
- [34] R.W. Rollins and E.R. Hunt. Intermittent transient chaos at interior crises in the diode resonator. *Phys. Rev. A*, 29:3327, 1984.
- [35] D. Jäger, A. Gasch, and H.G. Schuster. Emergence of aperiodic spikes and a boundary crisis in nonlinear microwave resonators. *Phys. Rev. A*, 33:1451, 1986.
- [36] J. Werner. *Aperiodische Stochastische Resonanz an einer Attraktor-Verschmelzkrise*. Diplomarbeit, TU-Darmstadt, 2005.
- [37] J. Becker. *Untersuchungen der nichtlinearen Dynamik im FMR-Experimenten an Yttrium-Eisen-Granat*. Diplomarbeit, TH-Darmstadt, 1992.
- [38] K. Kacperski and J.A. Holyst. Theory of oscillations in average crisis-induced transient lifetimes. *Phys. Rev. E*, 60:403, 1999.
- [39] K. Kacperski and J.A. Holyst. Anomalous oscillations of average transient lifetimes near crises. *Phys. Lett. A*, 254:53, 1999.
- [40] K. Kacperski and J.A. Holyst. Control of crisis-induced intermittency in the dynamics of a kicked damped spin. *Phys. Rev. E*, 55:5044, 1997.
- [41] J. C. Sommerer, E. Ott, and C. Grebogi. Scaling law for characteristic times of noise-induced crises. *Phys. Rev. A*, 43:1754, 1991.
- [42] F. Rödelsperger. *Konzepte der nichtlinearen Dynamik angewandt auf Spinwelleninstabilitäten im Yttrium-Eisengranat*. Dissertation, TH-Darmstadt, 1993.
- [43] T. Assmus. *Aperiodische Stochastische Resonanz*. Diplomarbeit, TU-Darmstadt, 2002.
- [44] A. Kittel. private Mitteilung, 2003.
- [45] A. Krawiecki. private Mitteilung, 2001.
- [46] E. Reibold, W. Just, J. Becker, and H. Benner. Stochastic resonance in chaotic spin-wave dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 78:3101, 1997.

- [47] M. Diestelhorst and K. Drozhdin. Stochastic resonance in ferroelectric triglycine sulfate. *Ferroelectrics*, 238:589, 2000.
- [48] B. McNamara, K. Wiesenfeld, and R. Roy. Observation of stochastic resonance in a ring laser. *Phys. Rev. Lett.*, 60:2626, 1988.
- [49] L. Yang, Z. Hou, and H. Xin. Stochastic resonance in the absence and presence of external signals for a chemical reaction. *J. Chem. Phys.*, 110:3591, 1999.
- [50] A. Bulsara, E. W. Jacobs, T. Zhou, F. Moss, and L. Kiss. Stochastic resonance in a single neuron model: Theory and analog simulation. *J. Theo. Biology*, 152:531, 1991.
- [51] S. Fauve and F. Heslot. Stochastic resonance in a bistable system. *Phys. Lett. A*, 97:5, 1983.
- [52] J.F. Lindner, B.K. Meadows, W.L. Ditto, M.E. Inchiosa, and A. R. Bulsara. Array enhanced stochastic resonance and spatiotemporal synchronization. *Phys. Rev. Lett.*, 75:3, 1995.
- [53] M. Loecher, D. Cigna, and E. R. Hunt. Noise sustained propagation of a signal in coupled bistable electronic elements. *Phys. Rev. Lett.*, 80:5212, 1998.
- [54] M. Löcher, M.E. Inchiosa, J. Neff, A.R. Bulsara, K. Wiesenfeld, L. Gammaitoni, P. Hänggi, and W. Ditto. Theory of controlling stochastic resonance. *Phys. Rev. E*, 62:317, 2000.
- [55] B. McNamara and K. Wiesenfeld. Theory of stochastic resonance. *Phys. Rev. A*, 39:4854, 1989.
- [56] V.I. Melnikov. Schmitt-trigger: A solvable model for stochastic resonance. *Phys. Rev. E*, 48:2481, 1993.
- [57] J.J. Collins, C.C. Chow, A.C. Capela, and T.T. Imhoff. Aperiodic stochastic resonance. *Phys. Rev. E*, 54:5575, 1996.
- [58] P. Jung and P. Hänggi. Amplification of small signals via stochastic resonance. *Phys. Rev. A*, 44:8032, 1991.
- [59] J. Casado-Pascual, J. Gomez-Ordóñez, M. Morillo, and P. Hänggi. Subthreshold stochastic resonance: Rectangular signals can cause anomalous large gains. *Phys. Rev. E*, 68:061104, 2003.
- [60] Z. Gingl, P. Makra, and R. Vajtai. High signal-to-noise ratio gain by stochastic resonance in a double well. *Fluctuation and Noise Letters*, 1:181, 2001.
- [61] H.A. Kramers. Brownian motion in a field force and the diffusion of chemical reactions. *Physica (Utrecht)*, 7:284, 1940.

- [62] D. Sornette. *Critical Phenomena in Natural Sciences*. 2nd Editon, Springer, Berlin, New York, 2004.
- [63] P. Hänggi and L. Schimansky-Geier. Stochastic resonance: New horizons in physics and engineering. Workshop am MPI für die Physik komplexer Systeme, Dresden 2004.
- [64] C. Nicolis and G. Nicolis. Stochastic aspects of climatic transitions-additive fluctuations. *Tellus*, 34:1, 1982.
- [65] W. Just, H. Kantz, C. Rödenbeck, and M. Helm. Stochastic modelling: replacing fast degrees of freedom by noise. *J. Phys. A*, 34:3199, 2001.
- [66] G. Nicolis, C. Nicolis, and D. McKernan. Stochastic resonance in chaotic dynamics. *J. Stat. Phys.*, 70:125, 1993.
- [67] W. Just. private Mitteilung, 2003.
- [68] A. Krawiecki. Stochastic resonance in on-off intermittency. *Acta Physica Polonica B*, 29:1589, 1998.
- [69] S. Mizutani and K. Arai. Enhancement of deterministic stochastic resonance in coupled chaotic systems. *SPIE Proc.*, 5471:531, 2004.
- [70] T. Stemler, M. Scheuermann, and H. Benner. Spatiotemporal stochastic resonance in an array of Schmitt triggers. *SPIE Proc.*, 5471:244, 2004.
- [71] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, 27:379–423, 632–656, 1948.
- [72] Th. Schreiber. Measuring information transfer. *Phys. Rev. Lett.*, 85:461, 2000.
- [73] A. Krawiecki. private Mitteilung, 2004.
- [74] E.B. Dynkin and Juschkevitsch A.A. *Sätze und Aufgaben über Markoffsche Prozesse*. Springer, Heidelberg, 1969.
- [75] W. Just. private Mitteilung, 2006.
- [76] W. Just, K. Gelfert, N. Baba, A. Riegert, and H. Kantz. Elimination of fast chaotic degrees of freedom: On the accuracy of the Born Approximation. *J. Stat. Phys.*, 112:277, 2003.
- [77] T. Jüngling, T. Stemler, and H. Benner. Stochastic multiresonance at an interior crisis. To be published, 2006.
- [78] Analog Devices. Datasheet for the AD711 BiFET operational amplifier.
- [79] Analog Devices. Datasheet for the AD844 monolithic operational amplifier.

- [80] Analog Devices. Datasheet for the AD847 monolithic operational amplifier.
- [81] H. Wupper. *Professionelle Schaltungstechnik mit Operationsverstärkern*. Franzis-Verlag, Poing, 1994.
- [82] Texas Instruments. Datasheet for the TL08x JFET-input operational amplifier.
- [83] A.C.H Rowe and P. Etchegoin. Experimental observation of stochastic resonance in a linear electronic array. *Phys. Rev. E*, 64:031106, 2001.



# Danksagung

Herrn Prof. Dr. Hartmut Benner möchte ich ganz herzlich für die Möglichkeit danken, in seiner Arbeitsgruppe dieses interessante Forschungsgebiet zu bearbeiten. Vor allem seine wissenschaftlichen Ratschläge und die wohlmeinenden Hinweise, dass wir eine experimentelle Gruppe sind, führten zum Erfolg dieser Arbeit.

Prof. Dr. Wolfram Just und Dr. Andrzej Krawiecki haben mich während meiner gesamten Promotionszeit immer wieder unterstützt und aus gewissen Untiefen herausgelotst. Für ihre offenen Ohren und schnellen Antworten bin ich sehr dankbar. Hr. Just hat darüber hinaus mit seinen großartigen Vorlesungen und Vorträge über nichtlineare Dynamik viel zu meiner chaotischen Ausbildung beigetragen.

Für die Inspiration des stochastischen Modells danke ich Prof. Dr. Peter Hänggi und Prof. Dr. Lutz Schimansky-Geier stellvertretend für alle die Kollegen, die in Diskussionen versuchten, meine chaotische Welt mit ihren stochastischen Gedanken zu verstehen.

Besonderer Dank gebührt allen den Kollegen mit denen ich an meinen Experimenten arbeiten durfte. Ohne die Farbensichtigkeit und das Durchhaltevermögen von Tilman Assmus, Marco Scheuermann und Johannes Werner wären viele Ergebnisse dieser Arbeit so nicht zustande gekommen. Johannes Werner und Thomas Jüngling, der aktuell die chaotische SR weiter untersucht, brachten mich immer wieder zum Überdenken der Phänomene, und ihre Begeisterung wirkte auf mich ansteckend.

Insgesamt möchte ich mich bei den Mitgliedern der Arbeitsgruppen Benner und Fajara für die gute Arbeitsatmosphäre im Institut bedanken, die weit über ein nebeneinander-her-Arbeiten hinausging. Grillabende, Wanderungen, Kaffeerunden und vielfältige Feiern machten die gemeinsame Zeit zu etwas Besonderem. Klaus Höhne und Dr. Oliver Lips ist es zu verdanken, dass ich jeden Tag gerne ins Institut kam.

Bei meinen Eltern und Brüdern danke ich für den Rückhalt und die Unterstützung, die sie mir über die Jahre gegeben haben. Ein letzter, ganz besonderer Dank gilt meiner Frau Sonja, die mich auch in schwierigen Phasen erträgt und mir ständig neue Kraft und Gewissheit gibt.



# Lebenslauf

## Angaben zur Person

Name:	Thomas Claudio Stemler
Geburtsdatum:	27. September 1973
Geburtsort:	Löffingen / Schwarzwald
Staatsangehörigkeit:	deutsch
Familienstand:	verheiratet

## Bildungsweg

August 1980 – Juli 1984	Besuch der Lucian-Reich-Grundschule, Hüfingen
September 1984 – Juni 1990	Besuch der Realschule, Donaueschingen
September 1990 – Mai 1993	Besuch des Technischen Gymnasiums, Villingen-Schwenningen
Mai 1993	Abitur
Juli 1993 – Juni 1994	Wehrdienst, Sigmaringen
Oktober 1994 – März 2001	Studium der Physik an der Technischen Universität Darmstadt
Januar 2000 – Januar 2001	Diplomarbeit über das Thema „Stochastische Multi-Resonanz in einem autonomen Schwingkreis“ am Institut für Festkörperphysik
März 2001	Diplom
seit Mai 2001	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Festkörperphysik der Technischen Universität Darmstadt

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich diese Arbeit selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe.

Ich habe bisher noch keinen Promotionsversuch unternommen.

Darmstadt, im April 2006